# Konveksnost - 2. semester, 2006/07

## Tretja domača naloga

Rešitve oddajte do 1. junija 2007. Pri prvih dveh nalogah zadošča, da podate rešitve za $d \leq 5$.

1. Pokaži, da že vektorji lic vseh politopov z $d+2$ oglišči napenjajo hiperravnino v $\mathbb{R}^d$ določeno z Eulerjevo enačbo.

2. Naj bo $f_k(v,d)$ število vseh lic dimenzije $k$ v cikličnem politopu dimenzije $d$ z $v$ oglišči. Uporabi Dehn-Sommervillove enakosti in zveze $f_k(v,d) = \binom{v}{k+1}$ za $0 \leq k \leq \left[\frac{d}{2}\right] - 1$ in pokaži naslednje enakosti.
   Za $d = 2n$ :
   $$f_k(d+2,d) = \binom{2n+2}{k+1} - 2\binom{n+1}{k-n}$$
   in za $d = 2n+1$:
   $$f_k(d+2,d) = \binom{2n+3}{k+1} - \binom{n+1}{k-n-1} - \binom{n+2}{k-n}.$$

3. Pokaži, da točke $(a, b, 0, 0)$, kjer je $a, b \in \{1, -1\}$ skupaj z vsemi točkami, ki jih dobimo s permutacijami koordinat v teh točkah, tvorijo oglišča 24-celice $C$. Poišči enačbe nosilnih hiperravnin za maksimalna lica in pokaži, so točke $(a, b, c, d)$, $a, b, c, d \in \{1, -1\}$ skupaj z vsemi točkami, ki jih dobimo s permutacijami koordinat v točkah $\pm(2, 0, 0, 0)$, ravno oglišča dualnega politopa $C^*$ glede na sfero $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 = 2$. Poišči podobnostno transformacijo v $\mathbb{R}^4$, ki slika $C$ v $C^*$.

4. Za vsak politop $P$ dimenzije 3 velja, da ima bodi $P$ bodisi $P^*$ maksimalno lice, ki je simpleks (trikotnik). Pokaži, da obstaja tak politop $Q$ dimenzije 4, da niti $Q$ niti $Q^*$ nima nobenega maksimalnega lica, ki je simpleks.

5. Preveri izrek o vsoti dveh kvadratov za vsa praštevila oblika $4k+1$ med 50 in 100.

6. Preveri izrek o vsoti štirih kvadratov za vsa števila med 30 in 40.