

5. PISNI IZPIT IZ MATEMATIKE 3

2. 2. 2005

FMF, Praktična matematika

1. Reši Bernoullijevo diferencialno enačbo

$$(x^2 + y^2)dx + 3xydy = 0.$$

2. Poišči kritične točke funkcionala

$$F(y) = \int_0^\pi (2(\sin x)y + y'^2) dx,$$

kjer je $y(0) = y(\pi) = 0$, $\int_0^\pi y dx = 1$.

REŠITEV Modificiran funkcional se glasi

$$G(y) = \int_0^\pi (2(\sin x)y + y'^2 + \lambda y) dx$$

in zato dobimo iz Euler-Lagrangeeve enačbe

$$y'' = \sin x + \frac{\lambda}{2},$$

od koder preberemo

$$y = -\sin x + \frac{\lambda}{4}x^2 + ax + b.$$

Robna pogoja $y(0) = y(\pi) = 0$ nam dasta $b = 0$, $a = -\frac{\lambda\pi}{4}$. Ker velja

$$\int_0^\pi y dx = -2 - \frac{\lambda\pi^3}{24} = 1,$$

odtod dobimo

$$\lambda = -\frac{72}{\pi^3},$$

torej

$$y = \frac{18}{\pi^2}x - \frac{18}{\pi^3}x^2 - \sin x.$$

□

3. S pomočjo integracije v kompleksnem izračunaj integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \vartheta}{5 + 3 \cos \vartheta} d\vartheta.$$

REŠITEV S substitucijo $z = e^{i\vartheta} = \cos \vartheta + i \sin \vartheta$ prevedemo gornji integral v

$$-i \oint_C \frac{z^2 + 1}{3z(z + \frac{1}{3})(z + 3)} dz,$$

kjer je C enotska krožnica. Velja $\text{Res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{3}$, $\text{Res}_{z=-1/3} f(z) = -\frac{5}{12}$ in zato je končni rezultat $-\frac{\pi}{6}$. $\square$

4. Reši toplotno enačbo za palico z izoliranimi krajiščema. Karakteristike palice so $L = 1$, $c = 1$, $f(x) = \sin x$.