4. Kolokvij iz Matematike 3

FMF, Praktična matematika
Rešitve

1. (30) Uporabi navedeni substituciji, reduciraj do Besselove diferencialne enačbe in splošno rešitev izrazi s pomočjo Besselovih funkcij.

$$x^2y'' - 5xy' + 9(x^6 - 8)y = 0, \quad (y = x^3u, x^3 = z).$$

Namig: $u(x) = u(\sqrt[3]{z}) = U(z)$.

Rešitev Upoštevaje subtitucijo $y = x^3u$ dobimo enačbo za u, ki se glasi

$$x^2u'' + xu' + 9(x^6 - 9)u = 0.$$

S substitucijo $U(z) = u(\sqrt[3]{z}) = u(x)$ pa slednjo enačbo prevedemo v

$$z^2U'' + zU' + (z^2 - 9)u = 0,$$

ki ima rešitev $U(z) = AJ_3(z) + BY_3(z)$, torej je potem

$$y(x) = x^3(AJ_3(x^3) + BY_3(x^3)).$$

□

2. (30) Reši toplotno enačbo za palico z izoliranima krajiščema. Karakteristike palice so $L = \pi, c = 1, f(x) = \sin(2x)$.
Namig: $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$.

Rešitev

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(2x)\,dx = 0,\\
A_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(2x)\cos nx\,dx\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\sin((n+2)x) - \sin((n-2)x))\,dx\\
&= \begin{cases} \frac{-8}{\pi(n^2-4)}, & n \text{ lih}\\ 0, & \text{sicer} \end{cases}.
\end{aligned}$$

Torej je

$$u(x,t) = -\frac{8}{\pi}\sum_{n \text{ lih}} \frac{1}{(n^2-4)}\cos(nx)e^{-n^2t}.$$

□

3. (40) Reši valovno enačbo za vpeto pravokotno membrano s $c = 1$, stranicama $a = 1, b = 2$, z "začetno obliko" $f(x,y) = xy(x-1)(y-2)$ ter "začetno hitrostjo" $g(x,y) \equiv 0$.

Rešitev Zaradi $g(x,y) \equiv 0$ so $B^*_{mn} = 0$. Za izračun

$$B_{mn} = 2\int_0^2\int_0^1 xy(x-1)(y-2)\sin(m\pi x)\sin\frac{n\pi y}{2}\,dx\,dy$$

si najprej izračunajmo

$$
\begin{aligned}
\int x^2 \sin(\alpha x)\, dx &= -\frac{x^2 \cos(\alpha x)}{\alpha} + \frac{2x \sin(\alpha x)}{\alpha^2} + \frac{2\cos(\alpha x)}{\alpha^3} + C, \\
\int x \sin(\alpha x)\, dx &= -\frac{x \cos(\alpha x)}{\alpha} + \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha^2} + C.
\end{aligned}
$$

Potem imamo

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 x(x-1)\sin(m\pi x)\, dx &= \begin{cases} -\frac{4}{m^3\pi^3}, & m \text{ lih} \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}, \\
\int_0^2 y(y-2)\sin\frac{n\pi y}{2}\, dy &= \begin{cases} -\frac{32}{n^3\pi^3}, & n \text{ lih} \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}.
\end{aligned}
$$

Ko združimo, dobimo

$$
B_{mn} = \begin{cases} \frac{256}{m^3 n^3 \pi^6}, & m, n \text{ liha} \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}.
$$

Potrebujemo še

$$
\lambda_{mn} = \frac{\pi}{2}\sqrt{4m^2 + n^2}.
$$

Torej

$$
u(x,y,t) = \sum_{m,\, n \text{ liha}} \frac{256}{m^3 n^3 \pi^6} \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{4m^2+n^2}\right) t\right) \sin(m\pi x) \sin\frac{n\pi y}{2}.
$$

$\square$