Naloge za pripravo na 4. Kolokvij iz Matematike 3

FMF, Praktična matematika
14. 5. 2004

Opozorilo: V rešitvah uporabljene oznake so takšne, kot smo jih uporabljali na vajah!

1. (*Modificirane Besselove funkcije*) Definirajmo

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(x).$$

Pokaži:

- I_ν reši DE
$$x^2y'' + xy' - (x^2 + \nu^2)y = 0.$$
- I_ν ima reprezentacijo z vrsto
$$I_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+\nu}}{2^{2m+\nu} m!\Gamma(m + \nu + 1)}.$$

R: Uvedemo substitucijo $z = ix$ in $\tilde{y}(z) = y(x) = y(-iz)$.

2. Uporabi navedene substitucije, reduciraj do Besselove diferencialne enačbe in splošno rešitev izrazi s pomočjo Besselovih funkcij.

(a) $xy'' - 5y' + xy = 0, \quad (y = x^3u)$,
(b) $81x^2y'' + 27xy' + (9x^{2/3} + 8)y = 0, \quad (y = x^{1/3}u, x^{1/3} = z)$.

R:

(a) $y = Ax^3J_3(x) + Bx^3Y_3(x)$,
(b) $y = Ax^{1/3}J_{1/3}(x^{1/3}) + Bx^{1/3}J_{-1/3}(x^{1/3})$.

3. Poišči lastne vrednosti in lastne funkcije Sturm-Liouvilleovega problema
$$(e^{2x}y')' + e^{2x}(\lambda + 1)y = 0$$
pri pogoju
$$y(0) = y(\pi) = 0.$$

Namig: $y = e^{-x}u$.

R: $\lambda_n = -n^2, \quad y_n = e^{-x}\sin(nx), \quad n = 1, 2, 3 \ldots$

4. Hermiteovi polinomi H_n so definirani na $(-\infty, \infty)$ in zanje velja naslednja rekurzivna zveza:

$$2xH_n(x) = H_{n+1}(x) + 2nH_{n-1}(x), \quad H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x.$$

Izračunaj še H_2 in preveri, da je H_1 ortogonalen na H_0 in H_2 glede na utež $\rho(x) = e^{-x^2}$. (Seveda sta tudi H_0 in H_2 ortogonalna, ampak to presega naše integracijske sposobnosti.)

R: Vaja v integriranju per partes in izlimitiranih integralih.

5. Razvij funkcijo $f(x) = x^3$ v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$ in s pomočjo Parsevalove enakosti izračunaj vsoto

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^6},$$

pri čemer upoštevaj, da velja

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

R:

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{m+1}(m^2\pi^2 - 6)}{m^2} \sin(mx),$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

6. Vpeta struna dolžine $L = \pi$ in s $c^2 = 1$ ima "začetno obliko" $f(x) = \sin x$ in "začetno hitrost" $g(x) = -2\sin x$. S Fourierovo metodo reši valovno enačbo.

R: Rešitev je "na dlani".

7. Reši valovno enačbo za vpeto struno s karakteristikami $L = 1, c = 1, g(x) = 0$ in začetno obliko:

   (a) $f(x) = x(1-x)$,

   (b) $f(x) = \sin^2 \pi x$.

R:

(a)

$$B_n = \begin{cases} \frac{8}{n^3\pi^3}, & n \text{ lih} \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}$$

(b)

$$B_n = \begin{cases} \frac{-8}{(n^3-4n)\pi}, & n \text{ lih} \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}$$

8. Reši toplotno enačbo za palico s krajiščema “na ničli”. Karakteristike palice so $L = 2\pi, c = 3, f(x) = x(2\pi - x)$.

   R:

$$B_n = \begin{cases} \frac{32}{n^3\pi}, & n \text{ lih} \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}$$

9. Reši toplotno enačbo za palico z izoliranima krajiščema. Karakteristike palice so $L = 2, c = 1, f(x) = x^2 + x$.

   R:

$$A_0 = \frac{7}{3},$$

$$A_n = \frac{4(-1+5(-1)^n)}{n^2\pi^2}.$$

10. Razvij v dvojno Fourierovo vrsto funkcijo

$$f(x,y) = xy(x-3)(y-5)$$

   na pravokotniku $[0,3] \times [0,5]$.

   R:

$$B_{mn} = \begin{cases} \frac{14400}{m^3n^3\pi^6}, & m,n \text{ liha} \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}$$

11. Reši valovno enačbo za vpeto pravokotno membrano dolžine $a = 2$ in širine $b = 1$ z začetno obliko $f(x,y) = \sin^2(\pi x)\sin^2(2\pi y)$.

   R:

$$B_{mn} = \begin{cases} \frac{2^8}{(m^3-4m)(n^3-16n)\pi^2}, & m,n \text{ liha} \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}$$

12. (a) Naj bodo r, ϕ, z cilindrične koordinate. Pokaži: Če funkcija $u(r,\phi,z)$ zadošča $\Delta u = 0$, potem tudi

$$v(r,\phi,z) = \tfrac{1}{r}u(\tfrac{1}{r},\phi,z)$$

   zadošča $\Delta v = 0$.

(b) Naj bodo r, ϕ, θ sferične koordinate. Pokaži: Če funkcija $u(r, \phi, \theta)$ zadošča $\Delta u = 0$, potem tudi

$$v(r, \phi, \theta) = \tfrac{1}{r} u(\tfrac{1}{r}, \phi, \theta)$$

zadošča $\Delta v = 0$.

R: Vaja v parcialnem odvajanju.

13. Poišči vse radialno simetrične rešitve enačbe $\Delta u = 0$ na $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$.

R:$f(r) = \frac{A}{r} + B$.