2. Kolokvij iz Matematike 3

Rešitve

1. Naloga Poišči splošno (realno) rešitev nehomogenega sistema LDE

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_2 + \sin t, \\ y_2' &= y_1 + \cos t. \end{aligned}$$

Navodilo: Uporabi variacijo konstant!

Rešitev Pripadajoča matrika je $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ in njeni lastni vrednosti sta $\pm i$, lastna vektorja pa $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ \mp i \end{smallmatrix}\right]$. Splošna realna rešitev homogenega sistema se glasi

$$y_h = A \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{bmatrix}.$$

Bazni funkciji zložimo v matriko $Y = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{bmatrix}$ z inverzom $Y^{-1} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{bmatrix}$. Pri variaciji konstant dobimo $c' = Y^{-1} g = Y^{-1} \left[\begin{smallmatrix} \sin t \\ \cos t \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} \sin 2t \\ -\cos 2t \end{smallmatrix}\right]$ in zato $c = \int \left[\begin{smallmatrix} \sin 2t \\ -\cos 2t \end{smallmatrix}\right] dt = -\frac{1}{2} \left[\begin{smallmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{smallmatrix}\right] + \left[\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}\right]$. Splošna rešitev sistema se torej glasi

$$y = Yc = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} + A \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{bmatrix}.$$

□

2. Naloga Poišči splošno (realno) rešitev homogenega sistema LDE in obravnavaj tip ter stabilnost kritične točke. **Odgovore utemelji!**

(a) $y' = \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} y,$

(b) $y' = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} y.$

Rešitev

(a) Lastni vrednosti matrike sta $\pm 4i$, lastna vektorja pa $\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ \mp i \end{smallmatrix}\right]$. Splošna realna rešitev sistema se glasi

$$y = A \begin{bmatrix} 2\cos 4t \\ \sin 4t \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} 2\sin 4t \\ -\cos 4t \end{bmatrix}.$$

Ker sta lastni vrednosti čisto imaginarni, je točka $(0,0)$ center, ki je stabilna kritična točka.

(b) Edina lastna vrednost je 2, edini lastni vektor pa $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Korenski vektor je $\begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ 0 \end{bmatrix}$, tj. rešitev sistema $\begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Splošna rešitev se glasi

$$y = A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t} + B \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} te^{2t} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} \right).$$

Točka $(0,0)$ je nestabilen vozel, saj je 2 dvojna pozitivna lastna vrednost.

$\square$

3. Naloga Poišči kritične točke funkcionala

$$F(y) = \int_0^1 \left((x - y')^2 + 2xy \right) \, dx$$

pri pogoju $y(0) = 1$. (Upoštevaj še manjkajoči robni pogoj!)

Rešitev Euler-Lagrangeeva enačba za F se glasi $2x - \frac{d}{dx}(-2x + 2y') = 0 \therefore y'' = x + 1 \therefore y = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + Bx + C$. Ker je $y(0) = 1$, dobimo $C = 1$. Manjkajoč robni pogoj se glasi $y' - x|_{x=1} = 0 \therefore \frac{x^2}{2} + B|_{x=1} = 0 \therefore B = -\frac{1}{2}$. Končna rešitev je torej

$$y = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x + 1.$$

$\square$

4. Naloga Poišči kritične točke funkcionala

$$F(y) = \int_0^1 \left(y'^2 + 2y \right) \, dx$$

pri pogojih

$$y(0) = 0, \quad y(1) = \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 2y \, dx = \frac{1}{6}.$$

Rešitev Euler-Lagrangeeva enačba za $G(y) = \int_0^1 (y'^2 + 2y + 2\lambda y) \, dx$ se glasi $2(1 + \lambda) - \frac{d}{dx}(2y') = 0 \therefore y'' = 1 + \lambda \therefore y = \frac{1+\lambda}{2}x^2 + Bx + C$. Ker je $y(0) = 0$, je $C = 0$. Iz $y(1) = \frac{1}{2}$ sledi enačba $1 + \lambda + 2B = 1$. Iz $\int_0^1 ((1 + \lambda)x^2 + 2Bx) \, dx = \frac{1}{6}$ sledi enačba $2(1 + \lambda) + 6B = 1$. Iz obeh skupaj dobimo $\lambda = 1, B = -\frac{1}{2}$, torej $y = x^2 - \frac{x}{2}$. $\square$