2. Poskusni Kolokvij iz Matematike 3

REŠITVE

1. Naloga Reši začetni problem

$$\begin{aligned} y_1' &= 5y_1 + 4y_2 - 5t^2 + 6t + 25, \\ y_2' &= y_1 + 2y_2 - t^2 + 2t + 4, \\ y_1(0) &= 0, \\ y_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

Nasvet: Partikularno rešitev poišči z nastavkom.

Rešitev Poiščimo najprej splošno rešitev homogenega sistema. Matrika sistema je $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, njeni lastni vrednosti sta 1 in 6 in homogeni del ima splošno rešitev

$$y_h = A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^t + B \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} e^{6t}.$$

Partikularno rešitev y_p poiščemo z nastavkom

$$y_p = \begin{bmatrix} a \\ a' \end{bmatrix} t^2 + \begin{bmatrix} b \\ b' \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}.$$

Ko ga vstavimo v sistem enačb in poračunamo, dobimo sicer sistem 6 enačb za 6 neznank, ki pa ga je trivialno rešiti, saj se reševanje prevede na reševanje treh 2×2 "sistemčkov". Dobimo torej

$$\begin{bmatrix} a \\ a' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} b \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix},$$

torej $y_p = \begin{bmatrix} t^2-5 \\ -t \end{bmatrix}$. Upoštevaje začetne pogoje določimo še $A = B = 1$, torej se rešitev glasi

$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} e^{6t} + \begin{bmatrix} t^2 - 5 \\ -t \end{bmatrix}.$$

□

2. Naloga Poišči splošno (realno) rešitev homogenega sistema LDE in obravnavaj tip ter stabilnost kritične točke. Odgovore utemelji!

(a) $y' = \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} y,$

(b) $y' = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & -9 \end{bmatrix} y.$

Rešitev

(a) Lastni vrednosti matrike sistema sta konjugirano kompleksni, tj. $\lambda_{1,2} = 2 \pm i\sqrt{13}$. Pripadajoča lastna vektorja sta

$$\begin{bmatrix} 1 - i\sqrt{13} \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 + i\sqrt{13} \\ -2 \end{bmatrix}.$$

(Pri iskanju lastnih vektorjev 2×2 matrike upoštevamo dejstvo, da sta vrstici v matriki $A - \lambda I$ sorazmerni, ena od rešitev enačbe $ax + by = 0$ pa je kar $(b, -a)$. V zgornjem primeru smo vzeli drugo vrstico.) Splošna rešitev se torej glasi

$$y = A \begin{bmatrix} 1 - i\sqrt{13} \\ -2 \end{bmatrix} e^{(2+i\sqrt{13})t} + B \begin{bmatrix} 1 + i\sqrt{13} \\ -2 \end{bmatrix} e^{(2-i\sqrt{13})t}.$$

Ker želimo realno rešitev, nadomestimo par kompleksnih rešitev (ki sta konjugirani!) s parom $\Re, \Im$:

$$\Re \begin{bmatrix} 1 - i\sqrt{13} \\ -2 \end{bmatrix} e^{(2+i\sqrt{13})t} = e^{2t} \begin{bmatrix} \cos\sqrt{13}t + \sqrt{13}\sin\sqrt{13}t \\ -2\cos\sqrt{13}t \end{bmatrix},$$

$$\Im \begin{bmatrix} 1 - i\sqrt{13} \\ -2 \end{bmatrix} e^{(2+i\sqrt{13})t} = e^{2t} \begin{bmatrix} \sin\sqrt{13}t - \sqrt{13}\cos\sqrt{13}t \\ -2\sin\sqrt{13}t \end{bmatrix}.$$

Splošna rešitev je torej

$$y = Ae^{2t} \begin{bmatrix} \cos\sqrt{13}t + \sqrt{13}\sin\sqrt{13}t \\ -2\cos\sqrt{13}t \end{bmatrix} + Be^{2t} \begin{bmatrix} \sin\sqrt{13}t - \sqrt{13}\cos\sqrt{13}t \\ -2\sin\sqrt{13}t \end{bmatrix}.$$

Ker sta lastni vrednosti konjugirano kompleksni, je $(0,0)$ spiralna točka. Ker je realni del lastnih vrednosti pozitiven, je $(0,0)$ nestabilna kritična točka. (Možna je tudi utemeljitev s (p,q)-ravnino.)

(b) Lastni vrednosti sta $\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{61}$. Pripadajoča lastna vektorja sta

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -7 + \sqrt{61} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ -7 - \sqrt{61} \end{bmatrix}.$$

Splošna rešitev se glasi

$$y = A \begin{bmatrix} 3 \\ -7+\sqrt{61} \end{bmatrix} e^{(-2+\sqrt{61})t} + B \begin{bmatrix} 3 \\ -7-\sqrt{61} \end{bmatrix} e^{(-2-\sqrt{61})t}.$$

Ker je $\sqrt{61} > 2$, sta lastni vrednosti različnih predznakov, torej je $(0,0)$ sedlo, ki je vedno nestabilno.

$\square$

3. Naloga Pokaži, da je funkcija $y(x) = \sqrt{2x - 2x^2}$ ekstremala funkcionala

$$F(y) = \int_0^1 y\sqrt{1 - y^2 y'^2}\, dx$$

pri pogojih $y(0) = 0, y(1) = 0$.
Rešitev Zapišimo Euler-Lagrangeevo enačbo za naš funkcional:

$$\sqrt{1 - y^2y'^2} - \frac{y^2y'^2}{\sqrt{1-y^2y'^2}} + \frac{d}{dx}\left[\frac{y^3y'}{\sqrt{1-y^2y'^2}}\right] = 0.$$

Naloga zahteva, da preverimo, če funkcija $y = \sqrt{2x - 2x^2}$ zadošča gornji DE in robnim pogojem (očitno). To pa je le vaja v odvajanju in poenostavljanju izrazov, ki jo prepuščam bralcu. $\square$

4. Naloga Poišči kritične točke funkcionala

$$F(y) = \int_0^1 xy(x)\, dx$$

pri pogojih $y(0) = y(1) = 0,\ \int_0^1 y'^2\, dx = 1$.
Rešitev Izoperimetrični problem rešujemo z modificiranim funkcionalom

$$G(y) = \int_0^1 (xy + \lambda y'^2)\, dx.$$

Euler-Lagrangeeva DE za G se glasi

$$x - \frac{d}{dx}(2\lambda y') = 0 \therefore y'' = \frac{1}{2\lambda}x \therefore y = ax^3 + bx + c,$$

kjer smo pisali $a = \frac{1}{12\lambda}$. Ker je $y(0) = 0$, sledi $c = 0$. Ker je $y(1) = 0$, sledi $b = -a$. Konstanto a določimo iz pogoja $\int_0^1 y'^2\, dx = 1$.

$$y = a(x^3 - x) \therefore y'^2 = a^2(3x^2 - 1)^2$$

$$\Rightarrow \int_0^1 a^2(9x^4 - 6x^2 + 1)\, dx = \frac{4a^2}{5} = 1 \therefore a = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Ekstremali funkcionala sta torej funkciji $y = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}(x^3 - x)$. $\square$