1. Kolokvij iz Matematike 3

Rešitve

1. Naloga Reši diferencialno enačbo, če veš, da je integrirajoči množitelj odvisen le od produkta xy, tj. $M(x,y) = f(xy)$.

$$(xy^4 + 2x^2y^2)dx + (3x^2y^3 + x^3y)dy = 0.$$

Rešitev Veljati mora $((xy^4 + 2x^2y^2)f(xy))_y = ((3x^2y^3 + x^3y)f(xy))_x$, torej $(4xy^3 + 4x^2y)f(xy) + (xy^4 + 2x^2y^2)f'(xy)x = (6xy^3 + 3x^2y)f(xy) + (3x^2y^3 + x^3y)f'(xy)y$, od koder dobimo $(-2xy^3 + x^2y)f(xy) + (-2x^2y^4 + x^3y^2)f'(xy) = 0$, po krajšanju z $(-2xy^3 + x^2y)$ pa $f(xy) + xyf'(xy) = 0$. Pišimo $xy = t$ in dobimo DE za f: $tf'(t) + f(t) = 0 \therefore f(t) = \frac{C}{t}$. Za $M(x,y) = \frac{1}{xy}$ dobimo eksaktno DE $(y^3 + 2xy)dx + (3xy^2 + x^2)dy = 0$. $u(x,y) = \int(y^3 + 2xy)dx = xy^3 + x^2y + C(y)$ in $C'(y) = 0$, torej dobimo prvi integral DE $xy^3 + x^2y = D$. $\square$

2. Naloga Poišči družino ortogonalnih trajektorij k dani družini krivulj

$$x = Ce^{-y^2}.$$

Rešitev Ko odvajamo $x = Ce^{-y^2}$, dobimo $1 = Ce^{-y^2}(-2y)y'$. Iz enačbe družine krivulj izrazimo $C = xe^{y^2}$ in vstavimo v prejšnji izraz, da dobimo $1 = -2xyy' \therefore y' = -\frac{1}{2xy}$. Odtod dobimo DE za ortogonalne trajektorije na znan način, in sicer $y' = 2xy$. Odtod dobimo $\frac{dy}{y} = 2xdx \therefore \log y = x^2 + \log C \therefore y = Ce^{x^2}$. $\square$

3. Naloga Poišči splošno rešitev enačbe

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 16e^x + x^2 + 5x + 1.$$

Rešitev Ker je karakteristični polinom $P(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda+1)^3$, je rešitev homogene enačbe $y_h = Ae^{-x} + Bxe^{-x} + Cx^2e^{-x}$. Izračunajmo partikularni rešitvi za e^x in $x^2 + 5x + 1$ posebej. $y_{p,1} = ae^x \therefore (a + 3a + 3a + a)e^x = 16e^x \therefore a = 2$ in $y_{p,2} = bx^2 + cx + d \therefore 3(2b) + 3(2bx + c) + (bx^2 + cx + d) = x^2 + 5x + 1 \therefore b = 1, c = -1, d = -2$. Skratka, $y_{p,2} = x^2 - x - 2$. Končna rešitev je torej $y = y_h + y_{p,1} + y_{p,2}$. $\square$

4. Naloga Po "RLC" električnem nihajnem krogu poganjamo izmenični tok z napetostjo $U(t) = 100\cos 2t$ $[V]$. Upor upornika je $R = 16$ $[\Omega]$,

kapacitivnost kondenzatorja je $C = \frac{1}{8}\,[F]$ in induktivnost tuljave $L = 8\,[H]$. Kako se tok spreminja s časom, če privzamemo, da sta na začetku (ob času 0) tako tok kakor naboj v nihajnem krogu enaka 0?

FIZIKALNI PODUK. Na podlagi Kirchoffovega zakona zaključimo, da velja

$$U_R(t) + U_C(t) + U_L(t) = U(t),$$

kjer U_R, U_C, U_L v tem vrstnem redu označujejo padce napetosti na uporniku, kondenzatorju in tuljavi. Vemo naslednje:

$$\begin{aligned} U_R(t) &= RI(t), \\ U_L(t) &= L\frac{dI}{dt} = LI'(t), \\ I(t) &= C\frac{dU_C}{dt} \therefore U_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t I(\tau)d\tau + \frac{e_0}{C}, \text{ kjer je } e_0 \text{ naboj ob času } 0. \end{aligned}$$

Torej velja

$$RI(t) + \frac{1}{C}\int_0^t I(\tau)d\tau + \frac{e_0}{C} + LI'(t) = U(t).$$

Iščemo torej $I(t)$. Začetna pogoja sta $I(0) = 0, e_0 = 0$, od koder s pomočjo gornje enačbe zlahka dobimo $I'(0)$.

REŠITEV Iz enačbe v "poduku" dobimo $I'(0) = \frac{U(0)}{L} = \frac{25}{2}$. Iz takiste enačbe dobimo tudi nehomogeno LDE 2. reda s konstantnimi koeficienti za I, in sicer

$$LI'' + RI' + \tfrac{1}{C}I = U',$$

v našem primeru konkretno $8I'' + 16I' + 8I = -200\sin 2t \therefore I'' + 2I' + I = -25\sin 2t$. Ničli karakt. pol. sta $\lambda_{1,2} = -1$, zato je $I_h = Ae^{-t} + Bte^{-t}$. Za I_p vzemimo nastavek $I_p = a\cos 2t + b\sin 2t$ in z malo truda izračunamo nedoločena koeficienta $a = 4, b = 3$. Določiti moramo še A, B iz začetnih pogojev. Izkaže se, da mora biti $A = -4$ in $B = \frac{5}{2}$. □