1. Poskusni Kolokvij iz Matematike 3

FMF, Praktična matematika
19. 11. 2002

1. Naloga [25] Reši Bernoullijevo diferencialno enačbo

$$(2x^2 - y^2)\,dx + 3xy\,dy = 0.$$

2. Naloga [25] Poišči družino ortogonalnih trajektorij k dani družini krivulj

$$C^2x^2 + y^2 = C^2.$$

3. Naloga [25] S pomočjo Lagrangeeve metode reši enačbo

$$y'' + 6y' + 9y = \frac{8e^{-3x}}{1+x^2}.$$

4. Naloga [25] Po "RLC" električnem nihajnem krogu poganjamo izmenični tok z napetostjo $U(t) = 85\sin 4t\ [V]$. Upor upornika je $R = 20\ [\Omega]$, kapacitivnost kondenzatorja je $C = 10^{-2}\ [F]$ in induktivnost tuljave $L = 5\ [H]$. Kako se tok spreminja s časom, če privzamemo, da sta na začetku (ob času 0) tako tok kakor naboj v nihajnem krogu enaka 0?

Fizikalni poduk. Na podlagi Kirchoffovega zakona zaključimo, da velja

$$U_R(t) + U_C(t) + U_L(t) = U(t),$$

kjer U_R, U_C, U_L v tem vrstnem redu označujejo padce napetosti na uporniku, kondenzatorju in tuljavi. Vemo naslednje:

$$\begin{aligned} U_R(t) &= RI(t), \\ U_L(t) &= L\frac{dI}{dt} = LI'(t), \\ I(t) &= C\frac{dU_C}{dt} \therefore U_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t I(\tau)d\tau + \frac{e_0}{C}, \text{ kjer je } e_0 \text{ naboj ob času 0.} \end{aligned}$$

Torej velja

$$RI(t) + \frac{1}{C}\int_0^t I(\tau)d\tau + \frac{e_0}{C} + LI'(t) = U(t).$$

Iščemo torej $I(t)$. Začetni pogoji so $I(0) = 0, e_0 = 0$, od koder s pomočjo gornje enačbe zlahka dobimo $I'(0)$.