1. Poskusni Kolokvij iz Matematike 3

REŠITVE

1. Naloga Reši Bernoullijevo diferencialno enačbo

$$(2x^2 - y^2)\, dx + 3xy\, dy = 0.$$

Rešitev Enačbo delimo z dx ter dobimo $2x^2 - y^2 + 3xyy' = 0$. Pišimo $u = y^2$, zato je $u' = 2yy'$ in enačba preide v $2x^2 - u + \frac{3}{2}xu' = 0 \therefore u' - \frac{2u}{3x} = -\frac{4x}{3}$. Rešimo najprej homogeni del: $u' - \frac{2u}{3x} = 0 \therefore \frac{du}{u} = \frac{2dx}{3x} \therefore \log u = \frac{2}{3}\log x + \log C \therefore u = Cx^{2/3}$. Z variacijo konstante dobimo $C'(x) = \frac{\frac{-4x}{3}}{x^{2/3}} = -\frac{4}{3}x^{1/3} \therefore C(x) = -x^{4/3} + D$, torej je potem $u(x) = C(x)x^{2/3} = -x^2 + Dx^{2/3}$ in zato $y = \sqrt{-x^2 + Dx^{2/3}}$. □

2. Naloga Poišči družino ortogonalnih trajektorij k dani družini krivulj

$$C^2x^2 + y^2 = C^2.$$

Rešitev Ko odvajamo $C^2x^2 + y^2 = C^2$, dobimo $C^2 2x + 2yy' = 0$. Iz enačbe družine krivulj izrazimo $C^2 = \frac{y^2}{1-x^2}$ in vstavimo v prejšnji izraz, da dobimo $y' = \frac{xy}{x^2-1}$. Odtod dobimo DE za ortogonalne trajektorije na znan način, in sicer $y' = \frac{1-x^2}{xy}$. Odtod dobimo $ydy = (\frac{1}{x} - x)dx \therefore \frac{y^2}{2} = \log x - \frac{x^2}{2} + C$. □

3. Naloga S pomočjo Lagrangeeve metode reši enačbo

$$y'' + 6y' + 9y = \frac{8e^{-3x}}{1 + x^2}.$$

Rešitev Ker je karakteristični polinom $P(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda + 3)^2$, je rešitev homogene enačbe $y_h = Ae^{-3x} + Bxe^{-3x}$. Zato je $W(e^{-3x}, xe^{-3x}) = e^{-6x}$ in $y_p = -e^{-3x}\int \frac{xe^{-3x}8e^{-3x}}{e^{-6x}(1+x^2)}dx + xe^{-3x}\int \frac{e^{-3x}8e^{-3x}}{e^{-6x}(1+x^2)}dx = -4e^{-3x}\int \frac{2x}{1+x^2}dx + 8xe^{-3x}\int \frac{1}{1+x^2}dx = -4e^{-3x}\log(1 + x^2) + 8xe^{-3x}\operatorname{arctg} x$. Končna rešitev je torej $y = y_h + y_p$. □

4. Naloga Po "RLC" električnem nihajnem krogu poganjamo izmenični tok z napetostjo $U(t) = 85\sin 4t\ [V]$. Upor upornika je $R = 20\ [\Omega]$, kapacitivnost kondenzatorja je $C = 10^{-2}\ [F]$ in induktivnost tuljave $L = 5\ [H]$. Kako se tok spreminja s časom, če privzamemo, da sta na začetku (ob času 0) tako tok kakor naboj v nihajnem krogu enaka 0?

FIZIKALNI PODUK. Na podlagi Kirchoffovega zakona zaključimo, da velja

$$U_R(t) + U_C(t) + U_L(t) = U(t),$$

kjer U_R, U_C, U_L v tem vrstnem redu označujejo padce napetosti na uporniku, kondenzatorju in tuljavi. Vemo naslednje:

$$U_R(t) = RI(t),$$
$$U_L(t) = L\frac{dI}{dt} = LI'(t),$$
$$I(t) = C\frac{dU_C}{dt} \therefore U_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t I(\tau)d\tau + \frac{e_0}{C}, \text{ kjer je } e_0 \text{ naboj ob času 0.}$$

Torej velja

$$RI(t) + \frac{1}{C}\int_0^t I(\tau)d\tau + \frac{e_0}{C} + LI'(t) = U(t).$$

Iščemo torej $I(t)$. Začetni pogoji so $I(0) = 0, e_0 = 0$, od koder s pomočjo gornje enačbe zlahka dobimo $I'(0)$.

REŠITEV Iz enačbe v "poduku" dobimo $I'(0) = \frac{U(0)}{L} = 0$. Iz takiste enačbe dobimo tudi nehomogeno LDE 2. reda s konstantnimi koeficienti za I, in sicer

$$LI'' + RI' + \tfrac{1}{C}I = U',$$

v našem primeru konkretno $5I''+20I'+100I = 4\cdot 85\cos 4t \therefore I''+4I'+20I = 68\cos 4t$. Ničli karakt. pol. sta $\lambda_{1,2} = \frac{-4\pm\sqrt{16-80}}{2} = -2 \pm 4i$, zato je $I_h = Ae^{-2t}\cos 4t + Be^{-2t}\sin 4t$. Za I_p vzemimo nastavek $I_p = a\cos 4t + b\sin 4t$ in z malo truda izračunamo nedoločena koeficienta $a = 1, b = 4$. Določiti moramo še A, B iz začetnih pogojev. Izkaže se, da mora biti $A = -1$ in $B = -\frac{9}{2}$. □