3. Kolokvij iz Matematike 3

FMF, Praktična matematika
Rešitve

1. Naloga Preveri, da je funkcija

$$u = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$$

harmonična in ji poišči konjugiranko v. Funkcijo $u + iv$ izrazi kot holomorfno funkcijo spremenljivke $z = x + iy$.

Rešitev Prvi del naloge je vaja v odvajanju. Za potrebe iskanja konjugiranke zapišimo

$$u_x = e^{-x}(y \cos y + (1 - x) \sin y),$$

$$u_y = e^{-x}(y \sin y - (1 - x) \cos y).$$

Iz CR enačbe $u_x = v_y$ sledi

$$v = \int e^{-x}(y \cos y + (1 - x) \sin y)\, dy = e^{-x}(x \sin y + y \sin y) + C(x),$$

iz $u_y = -v_x$ pa še $C' = 0$, torej vzemimo $C = 0$. Potem imamo

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) = e^{-x}(x + iy)(\sin y + i \cos y) =$$

$$= i(x + iy)e^{-x}(\cos y - i \sin y) = ize^{-x}e^{-iy} = ize^{-(x+iy)} = ize^{-z}.$$

□

2. Naloga S pomočjo izreka o residuih izračunaj

$$\oint_C \frac{9}{z^4 + 5z^3 + 6z^2}\, dz,$$

kjer je $C = \{z \in \mathbb{C}; |z| = \frac{5}{2}\}$, integriramo pa v pozitivni smeri.

Rešitev Ker je

$$f(z) = \frac{9}{z^4 + 5z^3 + 6z^2} = \frac{9}{z^2(z + 2)(z + 3)},$$

ima f singularnosti v točkah $0, -2, -3$. Krivulja C objame 0 in -2, torej bo potrebno izračunati residue v teh točkah:

$$\mathrm{Res}_{z=-2} f(z) = \lim_{z \to -2} \frac{9}{z^2(z + 3)} = \frac{9}{4},$$

$$\mathrm{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z \to 0} \left(\frac{9}{(z + 2)(z + 3)} \right)' = \lim_{z \to 0} \left[-\frac{9(2z + 5)}{(z + 2)^2(z + 3)^2} \right] = -\frac{5}{4}.$$

Potem je vrednost integrala $2\pi i(\frac{9}{4} - \frac{5}{4}) = 2\pi i$. $\square$

3. Naloga S Frobeniusovo metodo poišči bazo rešitev DE

$$z^2y'' + zy' - (z^2 + \tfrac{1}{4})y = 0.$$

Bazni rešitvi skušaj prepoznati kot elementarni funkciji.

Rešitev Če zapišemo enačbo kot

$$y'' + \frac{y'}{z} - (1 + \frac{1}{4z^2})y = 0,$$

preberemo $p_0 = 1, q_0 = -\frac{1}{4}$ in karakteristična eksponenta sta $\mu_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$. Razlika eksponentov je $1 \in \mathbb{Z}$, vendar upamo, da člen z logaritmom ne bo potreben. V ta namen vzemimo nastavek $y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{k-\frac{1}{2}}$, kar nam da

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k k(k-1) z^{k-\frac{1}{2}} - \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} z^{k-\frac{1}{2}} = 0,$$

od koder dobimo, da sta lahko a_0, a_1 poljubna, za $k \geq 2$ pa velja $a_k k(k-1) = a_{k-2}$. Izberimo $a_0 = 1, a_1 = 0$. Iz rekurzije potem sledi, da so lihi koeficienti enaki 0, za sode pa velja $a_{2k} = \frac{1}{(2k)!}$ za $k \in \mathbb{N}_0$. Torej

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} z^{2k-\frac{1}{2}} = \frac{\operatorname{ch} z}{\sqrt{z}}.$$

Če bi izbrali $a_0 = 0, a_1 = 1$, bi povsem podobno dobili

$$y_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{(2k+1)-\frac{1}{2}} = \frac{\operatorname{sh} z}{\sqrt{z}}.$$

$\square$