3. Poskusni Kolokvij iz Matematike 3

FMF, Praktična matematika
24. 3. 2004
Rešitve

1. Preveri, da je funkcija

$$u(x,y) = e^{-2xy}\sin(x^2 - y^2)$$

harmonična in ji poišči konjugiranko v. Funkcijo $u + iv$ izrazi kot holomorfno funkcijo spremenljivke $z = x + iy$.

Rešitev Da je u harmonična, je zgolj vaja v parcialnem odvajanju. Vseeno izračunajmo

$$u_x = -2ye^{-2xy}\sin(x^2 - y^2) + e^{-2xy}\cos(x^2 - y^2)2x,$$

$$u_y = -2xe^{-2xy}\sin(x^2 - y^2) + e^{-2xy}\cos(x^2 - y^2)(-2y).$$

Pri določanju konjugiranke v namesto integracije per partes raje opazimo

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-2xy}\cos(x^2 - y^2)\right) = -u_x.$$

Torej velja $v = -e^{-2xy}\cos(x^2-y^2)+C(x)$. Ko izračunamo v_x in enačimo z $-u_y$, dobimo $C(x) = C$. Spričo enostavnosti vzemimo $C = 0$. Potem je

$$f(z) = f(x + iy) = u(x,y) + iv(x,y) =$$

$$= e^{-2xy}(\sin(x^2 - y^2) - i\cos(x^2 - y^2)) = -ie^{-2xy+i(x^2-y^2)} = -ie^{iz^2}.$$

□

2. Razvij funkcijo

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(2-z)}$$

v Laurentovo vrsto za

(a) $|z| < 1$,

(b) $1 < |z| < 2$.

Rešitev

(a)

$$\frac{z}{(z-1)(2-z)} = -\frac{z}{2(1-z)(1-\frac{z}{2})} =$$
$$= -\frac{z}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k\right) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{2^n}z^n.$$

(b)

$$\frac{z}{(z-1)(2-z)} = \frac{1}{z-1} + \frac{2}{2-z} =$$
$$= \frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} + \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}(\tfrac{1}{z})^k + \sum_{k=0}^{\infty}(\tfrac{z}{2})^k,$$

kjer prva vrsta konvergira za $|\frac{1}{z}| < 1 \iff |z| > 1$, druga pa za $|z| < 2$. Obe skupaj konvergirata na kolobarju $1 < |z| < 2$.

$\square$

3. S pomočjo izreka o residuih izračunaj

$$\oint_C \frac{e^{-z^2}}{\sin 2z}\,dz,$$

kjer je C enotska krožnica, integriramo pa v pozitivni smeri.

Rešitev Funkcija sinus ima ničle v točkah $k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Torej so singularnosti funkcije $f(z) = \frac{e^{-z^2}}{\sin 2z}$ enostavni poli v točkah $\frac{k}{2}\pi, k \in \mathbb{Z}$. Krivulja C objame samo singularnost 0. Ker je $\mathrm{Res}_{z=0}f(z) = \frac{1}{2}$, je vrednost integrala πi. $\square$

4. S pomočjo integracije v kompleksnem izračunaj integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\vartheta}{17-8\cos\vartheta}\,d\vartheta.$$

Rešitev S substitucijo $z = e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$ prevedemo gornji integral v

$$i\oint_C \frac{z^2+1}{8z(z-\frac{1}{4})(z-4)}\,dz,$$

kjer je C enotska krožnica. Velja $\mathrm{Res}_{z=0}f(z) = \frac{1}{8}, \mathrm{Res}_{z=1/4}f(z) = -\frac{17}{120}$ in zato je končni rezultat $\frac{\pi}{30}$. $\square$

5. S Frobeniusovo metodo poišči bazo rešitev DE

$$zy'' + 3y' + 4z^3y = 0.$$

Ali bazni rešitvi prepoznaš kot elementarni funkciji?

Rešitev Zapišimo enačbo še drugače

$$y'' + \frac{3}{z}y' + 4z^2y = 0,$$

od koder preberemo $p_0 = 3, q_0 = 0$. Karaketristična eksponenta sta 0 in -2. Vzemimo najprej nastavek $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{k-2}$. Ko uredimo indekse, dobimo

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(k-2)(k-3)z^{k-3} + \sum_{k=0}^{\infty} 3a_k(k-2)z^{k-3} + \sum_{k=4}^{\infty} 4a_{k-4}z^{k-3} = 0,$$

od koder odčitamo, da sta lahko a_0 in a_2 poljubna, $a_1 = a_3 = 0$ in

$$k \geq 4 : a_k(k-2)k + 4a_{k-4} = 0.$$

Ker sta a_1 in a_3 ničelna, sledi iz rekurzivne zveze $a_{2k+1} = 0$ za vse $k \in \mathbb{N}_0$. S pametno izbiro a_0, a_2 bomo dobili dve linearno neodvisni rešitvi.

(a) $a_0 = 1, a_2 = 0$:
Potem velja $a_{4k+2} = 0$ za vse $k \in \mathbb{N}_0$ in $a_{4k} = (-1)^k \frac{1}{(2k)!}$. S tem dobimo

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} z^{4k-2} = z^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} (z^2)^{2k} = z^{-2} \cos z^2.$$

(b) $a_0 = 0, a_2 = 1$:
Potem velja $a_{4k} = 0$ za vse $k \in \mathbb{N}_0$ in $a_{4k+2} = (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}$. S tem dobimo

$$y_2 = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} z^{(4k+2)-2} = z^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} (z^2)^{2k+1} = z^{-2} \sin z^2.$$

□

6. S Frobeniusovo metodo poišči bazo rešitev DE

$$(1+z)z^2y'' - (1+2z)zy' + (1+2z)y = 0.$$

REŠITEV Rešitev karakteristične enačbe je $\mu_{1,2} = 1$. Z nastavkom $y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{k+1}$ dobimo

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k k^2 z^{k+1} + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-1}(k-1)(k-2) z^{k+1} = 0.$$

Preberemo, da je a_0 poljuben, $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = 0$. Torej imamo prvo rešitev $y_1 = z$, če vzamemo $a_0 = 1$. Logaritmu se tukaj ne bo moč izogniti. Rešujemo enačbo $u'' + pu' + qu = \frac{y_1}{z^2} - \frac{2y_1'}{z} - \frac{py_1}{z}$ z nastavkom $u = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{k+1}$. Upoštevaje zgoraj dobljene rekurzije dobimo, da je b_0 lahko poljuben, $b_1 = 1$ in vsi ostali enaki 0. Mirno smemo vzeti $b_0 = 0$ (ker že imamo y_1) in s tem dobimo $y_2 = z \log z + z^2$. $\square$