Neasociativna algebra - 2002/03

Prva domača naloga

Izdelane naloge oddajte do 7. 11. 2002.

1. Določi razred nilpotentnosti za Liejevo algebro η_n strogo zgornje trikotnih matrik in razred rešljivosti za Liejevo algebro τ_n zgornje trikotnih matrik.

2. Poišči normalizatorja za τ_n in η_n v Liejevi algebri $gl_n(F)$ vseh matrik reda n nad komutativnim obsegom F.

3. Pokaži, da je $sl_n(F)$ izpeljana algebra za $gl_n(F)$.

4. Naj bo $g \in Gl_n(F)$. Potem pokaži, da je preslikava $\varrho : sl_n(F) \to sl_n(F)$, $\varrho(x) = -gx^T g^{-1}$ avtomorfizem Liejeve algebre $sl_n(F)$.

5. Pokaži, da sklep Liejevega izreka ne velja nad obsegom s karakteristiko $p > 0$: Pokaži, da je Liejeva algebra L generirana z matrikama

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p-1 \end{bmatrix}$$

   rešljiva, ne obstaja pa skupni lastni vektor za vse elemente iz L.

6. Pokaži, da v Liejevi algebri L velja

$$\operatorname{rad} L = \{x \in L;\ Tr(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y) = 0 \text{ za vse } y \in L^{(1)}\}.$$

7. Pokaži, da je Liejeva algebra L rešljiva natanko tedaj, ko je $Tr(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y) = 0$ za vse $x \in L$ in $y \in L^{(1)}$.

8. Poišči kak primer (asociativnega) produkta dveh derivacij, ki ni derivacija. Če je karakteristika obsega p pozitivna, potem pokaži, da je δ^p derivacija za vsako derivacijo δ.