Neasociativna algebra - 2002/03

Druga domača naloga

Izdelane naloge oddajte do 19. 12. 2002. Vse naloge so iz Humphreysove knjige [H].

1. Naj bo karekteristika komutativnega obsega F enaka $p \neq 0$. Če je Killingova forma na Liejevi algebri L nad F neizrojena, potem pokaži, da je L polenostavna. Pokaži, da obrat te trditve ne velja: Obravnavaj kvocient Lijeve algebre $sl_3(F)$ po njenem centru, ob privzetku, da je $p = 3$. [H, str. 24, n. 6]

2. Naj bo $L = sl_2(F)$, kjer je F komutativen algebraično zaprt obseg s karakteristiko 0. Naj bosta X, Y bazna vektorja za F^2, ki je modul nad L za običajno delovanje. Označimo z R algebro polinomov $F[X, Y]$. Delovanje L na F^2 razširimo na R po Leibnitzovem pravilu: $z \cdot (fg) = (z \cdot f)g + f(z \cdot g)$ za vse $z \in L$, $f, g \in R$. Pokaži, da je to delovanje dobro definirano in da je R res modul nad L. Potem pokaži, da je vektorski podprostor R_m homogenih polinomov stopnje m v R z bazo $X^m, X^{m-1}Y, \ldots, Y^m$, invarianten za delovanje L in da je enostaven modul z najvišjo utežjo m. [H, str. 34, n. 4]

3. Naj bo karakteristika F enaka $p \neq 0$ in $L = sl_2(F)$. Potem pokaži, da je modul R_m iz prejšnje naloge enostaven modul nad L, če je $m < p$ in ni enostaven za $m = p$. [H, str. 34, n. 5]

4. Naj bo $L = sl_n(F)$, kjer je F algebraično zaprt komutativen obseg s karakateristiko 0. Pokaži, da je vektoski podprostor vseh diagonalnih matrik v L maksimalni torus v L. [H, str. 40, del n. 1]

5. Kaj je dualna baza glede na Killingovo formo za standardno bazo $\{e_{ij}, i \neq j, e_{ii} - e_{i+1,i+1}\}$ v $sl_n(F)$? [H, str. 41, n. 6]

6. Pokaži, da so Cartanova števila za $sl_n(F)$ enaka $-1, 0$ ali 1. [H, str. 41, del n. 8]

7. Pokaži, da ne obstaja nobena štirirazsežna polenostavna Liejeva algebra. [H, str. 41, del n. 10]