Neasociativna algebra - 2002/03

Tretja domača naloga

Izdelane naloge oddajte do 3. 4. 2003. Naloge označene s [H] so iz Humphreysove knjige.

1. Določi Weylove grupe za vse različne (neekvivalentne) korenske sisteme v $\mathbb{R}^2$ in v $\mathbb{R}^3$.

2. Pokaži, da v Weylovi grupi obstaja natanko en element σ, ki slika vse pozitivne korene v negativne korene. Pokaži, da reduciran izraz za σ vsebuje vsa enostavna zrcaljenja. Koliko je dolžina $l(\sigma)$? [H, str. 54, n. 9]

3. Naj bo $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l\}$ baza za korenski sistem Φ. Nadalje naj bo $\lambda = \sum_{i=1}^{l} k_i \alpha_i$, kjer so bodisi vsi k_i nenegativna cela števila, bodisi so vsi k_i nepozitivna cela števila. Pokaži, da je λ bodisi večkratnik nekega korena iz Φ, bodisi obstaja tak element $\sigma \in \mathcal{W}$, da za $\sigma(\lambda) = \sum_{i=1}^{l} k_i' \alpha_i$ velja $k_i > 0$ in $k_j < 0$ za neka i in j. [H, str. 54, n. 10]

4. Pokaži, da so edina zrcaljenja (prek hiperravnin) v Weylovi grupi $\mathcal{W}$ za korenski sistem Φ oblike σ_α za $\alpha \in \Phi$. [H, str. 55, n. 13]

5. Pokaži, da je Weylova grupa za korenski sistem Φ izomorfna direktnemu produktu Weylovih grup njegovih nerazcepnih komponent. [H, str. 63, n. 4]

6. Preveri, da so koreni v srednjem stolpcu tabele 2 na strani 66 v [H] maksimalni koreni glede na delno urejenost $\prec$. [H, str. 66, del n. 2]

7. Konstruiraj korenski sitem E_6.