Neasociativna algebra - 2002/03

Četrta domača naloga

Izdelane naloge oddajte do 22. 5. 2003. Naloge označene s [H] so iz Humphreysove knjige.

1. Poišči delovanje elementov Weylove grupe na osnovni dominantni uteži λ_i, $i = 1, 2$, za Liejevo algebro A_2. Nato poišči nasičeno množico uteži z najvišjo utežjo $\lambda_1 + 3\lambda_2$. [H, str. 54, del n. 12]

2. Naj bo L polenostavna Liejeva algebra in $x \in L$ polenostaven element. Pokaži, da je x regularen natanko tedaj, ko leži v natanko eni Cartanovi podalgebri. [H, str. 81, n. 3]

3. Naj bo L končno razsežna Liejeva algebra. Pokaži, da potem univerzalna ovojna algebra $\mathcal{U}(L)$ nima deliteljev niča. [H, str. 95, n. 1]

4. Opiši uteži in maksimalne vektorje za naravne upodobitve linearnih Liejevih algeber A_l in B_l, $l \geq 2$. [H, str. 111, del n. 3]

5. Naj bo λ dominantna utež. Pokaži, da je 0 utež za standardni ciklični modul $V(\lambda)$ natanko tedaj, ko je λ enak vsoti (ne nujno različnih) korenov. [H, str. 116, n. 3]

6. Naj bosta $V = V(\lambda)$ in $W = V(\mu)$ standardna ciklična modula, λ in μ dominantni uteži. Pokaži, da je množica uteži za $V \otimes W$ enaka $\{\nu + \nu';\ \nu$ utež za $V,\ \nu'$ utež za $W\}$. Pokaži, da je večkratnost uteži $\nu + \nu'$ enaka
$$\sum_{\pi+\pi'=\nu+\nu'} \dim V_\pi \dim W_{\pi'}.$$

Pokaži, da je $\lambda + \mu$ utež z večkratnostjo 1. [H, str. 117, n. 7]

7. Naj bo L Liejeva algebra $sl(l+1, F)$ in H Cartanova podalgebra vseh diagonalnih matrik v L. Naj bodo μ_i, $i = 1, 2, \ldots, l+1$, koordinatne funkcije na H glede na standardno bazo v $gl(l+1, F)$. Potem so $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l$ baza za H^* in $\alpha_i = \mu_i - \mu_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, l$ baza za korenski sistem za L glede na H. To bazo označimo z Δ. Pokaži, da so osnovne dominantne uteži glede na Δ enake $\lambda_k = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k$, $k = 1, 2, \ldots, l$. Kaj so potem nerazcepni moduli $V(\lambda_k)$ z najvišjo utežjo λ_k, $k = 1, 2, \ldots, l$? [H, str. 117, n. 10 in 11]