Algebra 3

Pisni izpit (12. 3. 2003)

V vseh nalogah je F algebraično zaprt obseg s karakteristiko 0.

1. Naj bo L ortogonalna Liejeva algebra $\mathtt{o}_n(F)$ (torej B_l oziroma D_l za primeren l) in $A \in L$ obrnljiva matrika z lastnostjo $A^T M A = M$, kjer je

$$M = \begin{bmatrix} 0 & I_l \\ I_l & 0 \end{bmatrix} \text{ oziroma } M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_l \\ 0 & I_l & 0 \end{bmatrix}.$$

   Pokaži, da predpis $X \mapsto AXA^{-1}$ podaja avtomorfizem algebre L.

2. Naj bo L Liejeva algebra, ki ni nilpotentna, in $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ baza za (vektorski prostor) L. Pokaži, da potem množica $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \cup \{x_i + x_j;\ 1 \leq i < j \leq n\}$ vsebuje nenilpotenten element. (*Nasvet: Ali je lahko v Liejevi algebri, ki ni rešljiva,* $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}\, x_i \mathrm{ad}\, x_j) = 0$ *za vsak par* x_i, x_j, $i \neq j$? *Kaj pa* $\mathrm{Tr}\,((\mathrm{ad}\, x_i + \mathrm{ad}\, x_j)^2)$?)

   Ali znaš v $\mathtt{sl}_2(F)$ poiskati bazo, ki vsebuje samo nilpotentne elemente?

3. Izračunaj Killingovo formo algebre $\mathtt{o}_3(F)$ $(=B_1)$.

4. Naj bo L polenostavna Liejeva algebra in $H \subset L$ nilpotentna podalgebra z lastnostjo $H = N_L(H)$. Pokaži, da je potem H maksimalen torus v L. (*Nasvet: Pokaži, da velja* $H = \left\{y \in L;\ \textit{za vsak } h \in H \textit{ obstaja } k \geq 1,\ \textit{tako da } (\mathrm{ad}\, h)^k(y) = 0\right\}$.)

Vse odgovore dobro utemelji! Srečno!