Izpit iz GEOMETRIJE

17. junij 2004

Vpisna številka: Ime in priimek:
Vrsta: Sedež:

1. Poišči vse stožnice v $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$, ki se dotikajo premice $x = 0$, premice $z = 0$ v točki $(1, 1, 0)$ in premice $y = 0$ v točki $(1, 0, 1)$.

2. V projektivni ravnini so dane premice

$$\begin{aligned} p_1 &: \ 4x - 3y - z = 0, \\ p_2 &: \ x + y - 2z = 0, \\ p_3 &: \ 6x + ay - 5z = 0. \end{aligned}$$

   Določi parameter a in premico p_4 tako, da premice p_1, p_2, p_3 in p_4 tvorijo harmonično četverko.

3. Na spodnji sliki skonstruiraj presečišče premic $\overline{AB}$ in p, ne da bi povezal točki A in B.

4. Pokaži, da spodnja slika predstavlja afino ravnino z 9 točkami.

   - Koliko premic vsebuje ravnina? Koliko točk vsebuje vsaka premica?
   - Poišči tri vzporedne premice in zanje preveri prvi Desarguesov izrek.

Izpit iz GEOMETRIJE

30. junij 2004

Vpisna številka: Ime in priimek:
Vrsta: Sedež:

1. Naj bosta $\triangle ABC$ in $\triangle A'B'C'$ v perspektivni legi. Dokaži, da obstaja stožnica, glede na katero sta $\triangle ABC$ in $\triangle A'B'C'$ polarna.

2. Naj bodo A, A', B in B' točke na realni projektivni premici. Pravimo, da točki A, A' *ločita* točki B, B' če so v legi kot prikazuje skica.

   Naj za kolinearne točke M, N, A, A', B, B' velja
   $$\mathcal{D}(M, N, A, A') = \mathcal{D}(M, N, B, B') = -1.$$
   Dokaži, da točki A, A' **ne** ločita točk B, B'

3. Nariši vzorce, ki jih generirajo frizne grupe $\mathcal{F}_1^3$, $\mathcal{F}_1^2$ in $\mathcal{F}_2^2$.

4. V projektivni ravnini so dane take točke A, B, C in D, da nobene tri niso kolinearne. Projektivna transformacija Θ slika točko A v B, točko B v A, točko C v D in točko D v C. Poišči vse negibne točke in negibne premice preslikave Θ.

Izpit iz GEOMETRIJE

9. september 2004

Vpisna številka: Ime in priimek:

Vrsta: Sedež:

1. Določi vse projektivne transformacije projektivne ravnine $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$, ki slikajo točko $[1,0,0]$ v $[1,0,0]$, točko $[0,1,0]$ v $[1,1,0]$, in ohranjajo stožnico $xz - y^2 = 0$.

2. Naj bodo A, B in C točke na projektivni premici l in $\sigma : l \to l$ involucija. Dokaži, da za poljubno točko $K \in l$ velja
$$\mathcal{D}(A, B, \sigma(C), K) \cdot \mathcal{D}(B, C, \sigma(A), K) \cdot \mathcal{D}(C, A, \sigma(B), K) = 1.$$

3. V $\mathbb{R}^2$ dokaži posebni primer Pappusovega izreka:

   Naj točke A_1, A_2, A_3 ležijo na premici r in točke B_1, B_2, B_3 na premici s. Če se premice A_1B_1, A_2B_2 in A_3B_3 sekajo v eni točki, potem presečišča
$$A_2B_3 \cap A_3B_2,\ A_1B_3 \cap A_3B_1 \quad \text{in} \quad A_1B_2 \cap A_2B_1$$
   ležijo na premici skozi točko $p \cap s$.

4. Naj bo $\mathcal{A}$ afina ravnina, ki ustreza aksiomom A1-A5. Dokaži:
   (a) Poljubni dve premici imata enako število točk.
   (b) Če je število točk na eni premici n, ima ravnina n^2 točk.
   (c) vsaka točka leži na $n + 1$ premicah.
   (d) $\mathcal{A}$ vsebuje $n(n + 1)$ premic.

Izpit iz GEOMETRIJE

21. september 2004

Vpisna številka: Ime in priimek:
Vrsta: Sedež:

1. Dana je stožnica S_q in na njej tri različne točke A, B, C. Naj bosta trikotnika $\triangle ABC$ in $\triangle A'B'C'$ polarna glede na S_q. Dokaži, da sta $\triangle ABC$ in $\triangle A'B'C'$ v perspektivni legi.

2. Na premici p so dane točke A, B in C. Skonstruiraj točko $D \in p$ tako da bo
$$\mathcal{D}(A, B, C, D) = \frac{2}{3}.$$

3. Definicija: Naj bo p premica in $T \notin p$ točka na projektivni ravnini. Projektivnost, ki fiksira

   - točko T,
   - vse točke na p in
   - vse premice skozi T in A, kjer je $A \in p$.

   je *homologija* določena s p in T.

   Napiši vse možne homologije za
$$T[1, 2, 1] \text{ in } p \equiv x - 3y + z = 0.$$

4. Določi frizne grupe spodnjih vzorcev. Kaj so pripadajoče točkovne grupe?

Izpit iz GEOMETRIJE

9. februar 2005

Vpisna številka:

Ime in priimek:

1. Za vsako od možnih točkovnih grup nariši kak frizni vzorec s to točkovno grupo. Odgovor utemelji.

2. Poišči vse neizrojene stožnice v $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$, ki se dotikajo premic $x+y=0$ in $x+z=0$ ter imajo v točki $(1,0,0)$ tangento $y-z=0$.

3. V projektivni ravnini je dana prespektivnost $\eta : p \to q$ med premicama p in q s centrom T. Naj bo $S = p \cap q$. Izberimo tri različne točke A, B in C na p, ki so vse različne od S, in označimo z A', B' in C' njihove slike z η. Pokaži, da točka S leži na premici r, ki jo določajo presečišča $\overline{AB'} \cap \overline{A'B}$, $\overline{BC'} \cap \overline{B'C}$ in $\overline{AC'} \cap \overline{A'C}$. Zakaj so ta presečišča kolinearna? Pokaži, da premice $p, q, \overline{ST}$ in r tvorijo harmonično četverko.

4. Definicija: *Diagonalne tpčke,* ki pripadajo štirikotniku $PQRS$ so presečišča diagonal $PS \cap QR$, $PQ \cap SR$ in $PR \cap QS$.

   Dana je stožnica S_q, ki vsebuje neizrojen štirikotnik $PQRS$. Dokaži, da imata $PQRS$ in njegov polarni štirikotnik natanko eno skupno diagonalno točko.