Teorija nilpotentnih grup - 2003/04

Prva domača naloga

Izdelane naloge oddajte do 18. 12. 2003.

1. Dana je p-grupa $G = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 | x_i^p = [x_i, x_j, x_k] = 1$ za $i, j, k = 1, 2, 3, 4\rangle$. Pokaži, da izpeljana grupa G' ni enaka množici $\{[x, y];\ x, y \in G\}$. (Nasvet: Najprej pokaži, da je eksponent grupe enak p in nato izrazi poljuben element grupe z generatorji x_i in njihovimi komutatorji $[x_i, x_j]$.)

2. Naj bo G grupa reda p^n, kjer je p praštevilo. Pokaži, da je razred (nilpotentnosti) grupe G lahko največ $n - 1$. Če je razred G enak natanko $n - 1$, potem rečemo, da je G *p-grupa maksimalnega razreda*. Pokaži, da za p-grupo maksimalnega razreda velja:

   (a) $C_i(G) = Z_{n-i}(G)$ za $i = 1, 2, \ldots, n$,

   (b) $|C_i(G)| = p^{n-i}$ za $i = 2, 3, \ldots, n$.

   Pokaži, da je matrična podgrupa G v $Gl_p(\mathbb{C})$, $p \geq 3$, generirana z matrikama

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \omega \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \omega \end{bmatrix}$$

   p-grupa maksimalnega razreda. Tu je ω primitivni p-ti koren 1.

3. Naj bo eksponent grupe G enak 3. Potem pokaži, da velja $[x, y, y] = 1$ za vsak par elementov $x, y \in G$. Poišči vse neizomorfne 3-grupe, ki imajo dva generatorja in eksponent enak tri.

4. Naj bo G p-grupa in $\Phi(G)$ njena Frattinijeva podgrupa. Pokaži, da je $\Phi(G) = G' G^p$, kjer je G^p podgrupa generirana z vsemi p-timi potencami, tj. $G^p = \langle x^p | \, x \in G\rangle$. Če je $p = 2$, potem preveri, da velja $\Phi(G) = G^2$.