Teorija nilpotentnih grup - 2003/04

Druga domača naloga

Izdelane naloge oddajte do 16. 2. 2004.

1. *a*) Naj bo H podgrupa grupe G (ki ni nujno končna niti nilpotentna) in naj bo U podgrupa generirana z elementom $u \in G$. Če je $H \leq C_G([H,U])$, potem pokaži, da je preslikava $\phi : H \to [H,U]$, $\phi(h) = [h,u]$, homomorfizem grup.

   b) Denimo, da je komutator $[x,y]$ v cetru podgrupe generirane z x in y. Pokaži, da je potem $[x^k, y^l] = [x,y]^{kl}$ za poljubni naravni števili k in l.

2. Naj bo G končna regularna p-grupa. Potem pokaži:

   a) Če sta q, r poljubni potenci praštevila p, potem za neka $x, y \in G$ velja $[x^q, y^r] = 1$ natanko tedaj, ko je $[x,y]^{qr} = 1$.

   b) Če sta H in K edinki v G, potem je $[\mho_i(H), \mho_j(K)] = \mho_{i+j}([H,K])$.

   c) Če je H edinka v G, potem je $[H, \mho_i(G)] = 1$ natanko tedaj, ko je $[H,G] \subset \Omega_i(G)$.

   d) Velja $[\Omega_i(G), \mho_i(G)] = 1$.

3. Naj bo G zelo posebna p-grupa. Potem pokaži:

   a) Če je $\psi : Z(G) \to Z(G)$ dan avtomorfizem centra grupe G, potem obstaja avtomorfizem grupe G, ki je razširitev ψ. (Nasvet: Lahko uporabiš rezultat iz prve naloge.)

   b) Če je eksponent grupe G enak p, potem pokaži, da je center grupe $Z(G)$ edina prava netrivialna karakteristična podgrupa v G.

4. Naj bo G_1 cetralni produkt (ki ni direktni) dveh kopij diederske grupe $D(8)$ in G_2 cetralni produkt (ki ni direktni) dveh kopij kvaternionske grupe $Q(8)$. Pokaži, da sta grupi G_1 in G_2 izomorfni.