

LINEARNA ALGEBRA

ZA ŠTUDENTE PRAKTIČNE MATEMATIKE

TOMAŽ KOŠIR

12. januar 2009

stavljenje teksta *Katarina Roškar in avtor*
risbe *Katarina Roškar*

Kazalo

I	Vektorji	9
1	Seštevanje vektorjev in množenje s skalarjem	9
2	Skalarni produkt vektorjev	14
3	Vektorski in mešani produkt v \mathbb{R}^3	23
4	Premice v \mathbb{R}^2 in \mathbb{R}^3	31
5	Ravnine v \mathbb{R}^3	37
II	Matrike	43
1	Algebraične operacije na matrikah	44
1.1	Seštevanje matrik in množenje matrik s skalarjem . . .	44
1.2	Množenje matrik	46
1.3	Transponiranje matrik	50
2	Kvadratne matrike	51
3	Elementarne transformacije na matrikah	53
4	Elementarne matrike	57
III	Reševanje sistema linearnih enačb	61
1	Matrični zapis	61
2	Gaußova metoda	64
IV	Determinanta matrike	69
1	Definicija	69
2	Razvoj determinante	70
3	Lastnosti determinante	72
4	Računanje determinante	77
5	Determinanta produkta in prirejenka	79
6	Cramerjevo pravilo	82

V	Algebraične strukture	85
1	Polgrupa, monoid in grupa	85
2	Kolobar in obseg	88
3	Kolobar ostankov celih števil	90
4	Homomorfizem in izomorfizem	92
VI	Vektorski prostori	95
1	Definicija in osnovne lastnosti	95
2	Baza vektorskega prostora	101
3	Prehod na novo bazo	111
VII	Linearne preslikave	115
1	Definicija linearne preslikave in osnovne lastnosti	115
2	Matrika prirejena linearni preslikavi	122
3	Prehod na novi bazi	125
4	Rang linearne preslikave	126
5	Podobnost matrik	129
VIII	Lastne vrednosti in lastni vektorji	131
1	Definicije	131
2	Diagonalizacija	137
3	Schurov izrek	140
4	Cayley-Hamiltonov izrek	143
5	Minimalni polinom	151
6	Spektralni razcep	153
7	Nekatere posebne vrste matrik in linearnih preslikav	156
8	Funkcije matrik podobnih diagonalnim	160
IX	Vektorski prostori s skalarnim produktom	163
1	Definicija in osnovne lastnosti skalarnega produkta	163
2	Ortogonalne in ortonormirane množice	169
3	Linearni funkcionali	176
X	Sebiadjungirane, ortogonalne in normalne preslikave	181
1	Adjungirana preslikava	181
2	Lastnosti adjungiranja linearnih preslikav in matrik	184
3	Sebiadjungirane preslikave, simetrične in hermitske matrike	187
4	Normalne matrike in preslikave	190
5	Ortogonalne in unitarne matrike ter izometrije	193
6	Pozitivno-definitne matrike	198

XI	Kvadratne forme	201
1	Definicija in osnovne lastnosti	201
2	Krivulje drugega reda	205
3	Ploskve drugega reda	212
A	Permutacije	221
B	Evklidov algoritem	225
C	Ekvivalenčna relacija	229
D	Osnovni izrek algebre	235

Predgovor

Knjiga je napisana kot učbenik, namenjen predvsem študentom visokošolskega strokovnega programa Praktične matematike v prvem letniku pri predmetu Linearna algebra. V pomoč bo lahko še študentom drugih tehničnih in naravoslovnih fakultet, ki imajo v svojem programu osnove linearne algebre. Tudi študenti na univerzitetnem študiju matematike bodo v učbeniku našli razlago osnovnih vsebin predmeta Algebra 1, zahtevnejših vsebin pa ta učbenik ne pokriva.

Učbenik zajema snov v obsegu, primernem za predmet, ki ima na razpolago tri ure predavanj na teden. Snov je bila že velikokrat v celoti spredavana, zapisana v študijskem letu 2003/04 in večkrat predelana v sledečih študijskih letih. Kot študijsko gradivo je bil učbenik na voljo študentom na avtorjevih spletnih straneh. K dokončni pripravi tiskane izdaje je avtorja spodbudila akcija Oddelka za matematiko FMF za izdajanje učbenikov za predmete prenovljenih študijskih programov. Pri predmetu Linearna algebra bolonjska reforma ni prinesla večjih sprememb. Dokončno obliko je učbenik dobil v jeseni 2008.

Pristop je približan študentom visokošolskega strokovnega programa. Gradi na pojmih vektorja v \mathbb{R}^n in matrike, ki sta dostopnejša in primerna za konkretno računanje. Ne izognemo se uvedbi abstraktnih pojmov vektorskega prostora in linearne preslikave, saj nam brez teh manjka osnovni okvir za razumevanje računskih manipulacij. Poudarek pa je vseskozi na zgledih in računanju z matrikami in vektorji. Za razumevanja snovi v učbeniku je potrebno znanje srednješolske matematike.

Vsebina je razdeljena na enajst poglavij in štiri dodatke. Uvodni poglavji sta namenjeni geometriji v \mathbb{R}^3 - računanju z vektorji in osnovni geometriji premic in ravnin - ter računanju z matrikami. Tretje poglavje je namenjeno opisu Gaussove metode za reševanje sistemov linearnih enačb. V četrtem poglavju spoznamo pojem determinante, metode za njen izračun in Cramerjevo pravilo. V poglavjih od pet do sedem spoznavamo abstraktne pojme algebraičnih struktur, ki so osnovne v linearni algebri. To so najprej pojmi polgrupe, grupe, kolobarja in obsega, in potem osrednja pojma vektorskega

prostora in linearne preslikave. Razložimo vlogo vektorjev in matrik ter abstraktne pojme povežemo z že znanimi iz predhodnih poglavij. V osmem poglavju obravnavamo lastne vrednosti in lastne vektorje. Srečamo se z diagonalizacijo matrik, Schurovim izrekom, Cayley-Hamiltonovim izrekom in funkcijami matrik podobnih diagonalnim matrikam. V devetem poglavju uvedemo pojem abstraktnega skalarnega produkta v vektorskem prostoru in pojem ortonormirane baze. V naslednjem poglavju potem obravnavamo nekatere razrede linearnih preslikav in njim pripadajočih matrik, ki so definirane s pomočjo skalarnega produkta. V zadnjem poglavju znanje iz predhodnega poglavja uporabimo pri študiju kvadratnih form in z njimi povezanih krivulj in ploskev drugega reda. V dodatkih na kratko opišemo nekaj snovi, ki strogo gledano ne sodi v linearno algebro, je pa za razumevanje snovi v učbeniku nujno potrebna.

Učbenik je po rokopisu avtorja natipkala in sproti odpravila marsikatero napako Katarina Roškar. Narisala je tudi vse slike. Brez njenega dela učbenik najverjetneje nikoli ne bi bil napisan. Avtor je hvaležen tudi vsem svojim asistentom pri predmetu Linearna algebra, ki so veliko pripomogli pri iskanju prave stopnje zahtevnosti pri podajanju snovi. Zahvala gre tudi vsem študentom, ki so me opozorili na lepo število tipkarskih in nekaj računskih napak.

Ljubljana, december 2005 in december 2008

Tomaž Košir