Poglavje XI

Kvadratne forme

V zadnjem poglavju si bomo ogledali še eno vrsto preslikav, ki jih tudi lahko podamo z matrikami. To so tako imenovane kvadratne forme, ki niso več linearne preslikave. Kvadratne forme bomo uporabili za nalizo vseh možnih krivulj drugega reda v $\mathbb{R}^2$ in ploskev drugega reda v $\mathbb{R}^3$.

1 Definicija in osnovne lastnosti

V vektorskem prostoru $\mathbb{R}^n$ označimo z $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ običajni skalarni produkt. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična matrika. Potem preslikavo $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ podano s predpisom

$$q(\mathbf{v}) = \langle A\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle \quad \text{za } \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n,$$

imenujemo *kvadratna forma* na $\mathbb{R}^n$. Rečemo še, da simetrična matrika A *pripada* q.

Zgled 1.1 Vzemimo $n = 3$ in $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. Označimo še $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. Potem je

$$q(\mathbf{v}) = \langle A\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = 2x^2 + y^2 + 5z^2 - 2xy + 6xz\,. \qquad \square$$

Na $\mathbb{R}^n$ lahko kvadratno formo q podamo tudi kot polinom v x_i^2, x_ix_j, $i, j = 1, 2\ldots, n$, $i < j$, kjer so x_i komponente vektorja $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, to je

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}:$$

$$q(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} 2a_{ij}x_ix_j\,.$$

Potem je $q(\mathbf{v}) = \langle A\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle$ za simetrično matriko

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Zgled 1.2 Matrika za kvadratno formo $q(\mathbf{v}) = 3x^2 - 2y^2 + z^2 - 2xy + 6xz - 4yz$ na $\mathbb{R}^3$ je

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Potem velja $q(\mathbf{v}) = \langle A\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle$. $\square$

Vzemimo kvadratno formo $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ podano z $q(\mathbf{v}) = \langle A\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle$. Naj bo na $\mathbb{R}^n$ poleg standardne baze $\mathscr{S}$ dana še nova baza $\mathscr{B}$. Označimo z $\mathbf{v}_{\mathscr{B}}$ razvoj vektorja $\mathbf{v}$ po bazi $\mathscr{B}$ in s $P = P_{\mathscr{B}\mathscr{S}}$ prehodno matriko med novo bazo in standardno bazo. Torej velja $\mathbf{v} = P\mathbf{v}_{\mathscr{B}}$. Iz tega sledi

$$\langle A\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = \langle AP\mathbf{v}_{\mathscr{B}}, P\mathbf{v}_{\mathscr{B}}\rangle = \langle P^\top AP\mathbf{v}_{\mathscr{B}}, \mathbf{v}_{\mathscr{B}}\rangle.$$

V bazi $\mathscr{B}$ je kvadratna forma q podana s simetrično matriko $B = P^\top AP$.Ker želimo kvadratne forme opisati do spremembe baze natanko, vpeljemo pojem ekvivalentnosti dveh kvadratnih form.

Definicija 1.3 Kvadratni formi $q_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in $q_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ki jima pripadata zaporedoma matriki A_1 in A_2, sta *ekvivalentni*, če obstaja taka obrnljiva matrika P, da je

$$A_1 = P^\top A_2 P\,.$$ $\Diamond$

Opomba 1.4 Iz povedenega sledi, da lahko na dve (različni) kvadratni formi q_1 in q_2, ki sta ekvivalentni, gledamo kot na eno kvadratno formo v dveh (različnih) bazah.

Na množici vseh kvadratnih form $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiramo relacijo: q_1 in q_2 sta v relaciji $\sim$, če sta ekvivalentni kvadratni formi. Zlahka se prepričamo, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija. $\Diamond$

Trditev 1.5 *Vsaka kvadratna forma je ekvivalentna kaki kvadratni formi, ki ji pripada diagonalna matrika.*

Dokaz Naj bo A simetrična matrika, ki pripada kvadratni formi q. Po spektralnem izreku za simetrične matrike, se matriko A da diagonalizirati v kaki ortonormirani bazi. Torej je $A = QDQ^{-1}$, kjer je D diagonalna in stolpci matrike Q tvorijo ortonormirano bazo. Zato je $QQ^\top = I$ oziroma $Q^\top = Q^{-1}$. Matrika Q je ortogonalna matrika. Tako smo pokazali, da je $A = QDQ^\top$, kjer je Q obrnljiva matrika. Kvadratni formi, ki pripadata matrikama A in D, sta ekvivalentni. ∎

Izrek 1.6 (*Sylvestrov izrek o vztrajnosti*) *Naj bo $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kvadratna forma in A pripadajoča simetrična matrika. Potem je q ekvivalentna kvadratni formi, ki ji pripada matrika*

$$S = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & -I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{XI.1}$$

kjer je I_j identična matrika reda s_j, $j = 1, 2$, $s_1 + s_2 = \mathrm{r}(A)$, s_1 je število pozitivnih lastnih vrednosti (štetih z večkratnostmi) za A in s_2 število negativnih lastnih vrednosti (z večkratnostmi) za A.

Dokaz Po prejšnji trditvi je q ekvivalentna kvadratni formi, ki ji pripada diagonalna matrika D. Ker je A simetrična matrika, so vse njene lastne vrednosti realne. Pri tem lahko privzamemo, da je D oblike

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

kjer sta D_1 in D_2 diagonalni in so vsi diagonalni elementi v D_1 pozitivni in vsi diagonalni elementi v D_2 negativni. Tako je $D_1 \in \mathbb{R}^{s_1\times s_1}$ in $D_2 \in \mathbb{R}^{s_2\times s_2}$. Ker za vsako pozitivno realno število obstaja realen kvadratni koren, lahko najdemo taki obrnljivi diagonalni matriki E_1 in E_2, da je $E_1^2 = D_1$ in $E_2^2 = -D_2$. Označimo $P = \begin{bmatrix} E_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & E_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$. Potem je

$$P^\top DP = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & -I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S.$$

Kvadratna forma q je zato ekvivalentna kvadratni formi, ki ji pripada matrika S. ■

Definicija 1.7 Matriko S iz (XI.1) imenujemo *Sylvestrova matrika* za kvadratno formo $q(\mathbf{v}) = \langle A\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle$. Par števil (s_1, s_2) imenujemo *signatura* kvadratne forme q. Vsoto $s_1 + s_2 = \mathrm{r}(A)$ imenujemo *rang* kvadratne forme q. ◊

Opomba 1.8 Kvadratna forma je s signaturo določena do ekvivalentnosti natanko. Poljubni dve ekvivalentni kvadratni formi imata enako signaturo, neekvivalentni kvadratni formi pa imata različni signaturi. ◊

Zgled 1.9 Poiščimo Sylvestrovo matriko za kvadratno formo $q(x, y) = 4xy$ na $\mathbb{R}^2$. Tej kvadratni formi pripada simetrična matrika

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Karakteristični polinom za A je $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 4$. Lastni vrednosti za A sta 2 in -2, zato je signatura za q enaka $(1, 1)$. Sylvestrova matrika za q je

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$ □

Ker bomo kasneje rabili kvadratne forme na $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$, navedimo vse možne neekvivalentne kvadratne forme na $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$.

Izrek 1.10 *Na $\mathbb{R}^2$ imamo naslednje neekvivalentne kvadratne forme:*

signatura	*rang*	*kvadratna forma*
$(2, 0)$	2	$x^2 + y^2$
$(1, 1)$	2	$x^2 - y^2$
$(0, 2)$	2	$-x^2 - y^2$
$(1, 0)$	1	x^2
$(0, 1)$	1	$-x^2$
$(0, 0)$	0	0

Na $\mathbb{R}^3$ imamo poleg zgoraj naštetih še štiri neekvivalentne kvadratne forme z rangom 3:

signatura	*rang*	*kvadratna forma*
$(3, 0)$	3	$x^2 + y^2 + z^2$
$(2, 1)$	3	$x^2 + y^2 - z^2$
$(1, 2)$	3	$x^2 - y^2 - z^2$
$(0, 3)$	3	$-x^2 - y^2 - z^2$

Definicija 1.11 Naj bo A simetrična matrika, ki pripada kvadratni formi q. Naj bo $\mathscr{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ ortonormirana baza iz lastnih vektorjev za A in P ortogonalna matrika, katere stolpci so vektorji $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. Potem je

$$A = PDP^\top,$$

kjer je D diagonalna matrika. Označimo z $V_i = \mathscr{L}(\mathbf{v}_i)$. Potem vektorske podprostore $V_1, V_2, \ldots, V_n$ imenujemo *glavne osi* kvadratne forme q. Glavne osi nam določajo ortogonalen koordinatni sistem v $\mathbb{R}^n$. $\Diamond$

Zgled 1.12 Poiščimo glavni osi kvadratne forme $q(x, y) = 4xy$ na $\mathbb{R}^2$. Pripadajoča matrika je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

in njeni lastni vrednosti sta $\alpha_1 = 2$ in $\alpha_2 = -2$. Hitro izračunamo, da sta glavni osi $V_1 = \mathscr{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ in $V_2 = \mathscr{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$. $\Box$

2 Krivulje drugega reda

Krivulja drugega reda je množica točk $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ v $\mathbb{R}^2$, ki zadoščajo enačbi

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \tag{XI.2}$$

Pri tem privzamemo, da je vsaj eden od koeficientov a, b, c neničeln. Včasih krivuljam drugega reda rečemo tudi *stožnice*.

Kvadratna forma, ki pripada krivulji $(XI.2)$, je

$$q(\mathbf{v}) = q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2, \quad \text{kjer je } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Le-tej pripada matrika $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$. Torej je

$$q(\mathbf{v}) = \langle A\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle.$$

Linearni del enačbe (XI.2) zapišemo v obliki

$$dx + ex = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_0 \rangle,$$

kjer je $\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix}$. Enačbo krivulje drugega reda tako lahko zapišemo tudi v obliki

$$\langle A\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_0\rangle + f = 0\,. \tag{XI.3}$$

Na kratko si bomo ogledali vse možne krivulje drugega reda. Pri tem bomo ločili več primerov.

Primer I Predpostavimo, da je $\mathrm{r}(A) = 2$ in $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$.

Potem je enačba krivulje oblike

$$\langle A\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle + f = 0 \tag{XI.4}$$

Naj bo $A = PDP^\top$, kjer je P ortogonalna matrika in $D = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}$ diagonalna matrika. Z V_1 in V_2 označimo glavni osi za (XI.4). Ti dve glavni osi kvadratne forme q imenujemo *glavni osi* krivulje (XI.4). Pišimo še

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{v}' = P^\top \mathbf{v}\,.$$

V koordinatah x' in y' ima krivulja (XI.4) enačbo

$$\alpha_1 x'^2 + \alpha_2 y'^2 = -f\,.$$

Ker je $\mathrm{r}(A) = 2$, sta α_1 in α_2 neničelna. Sedaj ločimo več možnosti:

a) Če je $f = 0$, je enačba za (XI.4) enaka

$$\alpha_1 x'^2 + \alpha_2 y'^2 = 0\,. \tag{XI.5}$$

- Če sta α_1 in α_2 oba pozitivna ali oba negativna, je edina rešitev enačbe (XI.5) točka $(0, 0)$.
- Če sta α_1 in α_2 različnih predznakov, npr. $\alpha_1 > 0$ in $\alpha_2 < 0$, potem (XI.5) lahko zapišemo v obliki

$$(\beta_1 x' + \beta_2 y')(\beta_1 x' - \beta_2 y') = 0\,, \tag{XI.6}$$

kjer je $\beta_1 = \sqrt{\alpha_1}$ in $\beta_2 = \sqrt{-\alpha_2}$. Rešitev enačbe (XI.6) sta premici, ki se sekata v točki 0.

b) Predpostavimo, da je $f \neq 0$. Označimo $\gamma_1 = -\frac{f}{\alpha_1}$ in $\gamma_2 = -\frac{f}{\alpha_2}$. Potem ima krivulja (XI.4) enačbo

$$\frac{x'^2}{\gamma_1} + \frac{y'^2}{\gamma_2} = 1\,. \tag{XI.7}$$

Ločimo tri možnosti.

(i) Če sta oba γ_1 in γ_2 negativna, potem nobena točka $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ ne zadošča enačbi (XI.7).

(ii) Če je eden od γ_1 ali γ_2 pozitiven in drugi negativen, potem je (XI.7) enačba *hiperbole*.

(iii) Če sta oba γ_1 in γ_2 pozitivna, je (XI.7) enačba *elipse*.

Števili $\sqrt{|\gamma_1|}$ in $\sqrt{|\gamma_2|}$ v (ii) oziroma (iii) imenujemo *polosi* hiperbole, oziroma elipse.

Zgled 2.1 Narišimo krivuljo drugega reda z enačbo $5x^2-8xy+5y^2=4$. Kvadratni formi $5x^2-8xy+5y^2$ pripada matrika

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ta ima karakteristični polinom $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 10\lambda + 9 = (\lambda-9)(\lambda-1)$. Lastni vrednosti sta $\alpha_1 = 1$ in $\alpha_2 = 9$. Glavni osi sta $\mathscr{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ in $\mathscr{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$, oziroma premici z enačbama $y = x$ in $y = -x$. V koordinatnem sistemu

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

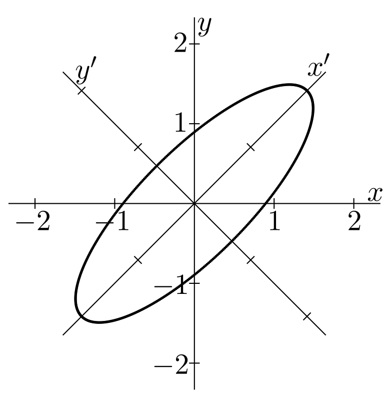
ima krivulja enačbo

$$x'^2 + 9y'^2 = 4\,,$$

oziroma

$$\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{\frac{4}{9}} = 1\,.$$

Krivulja je elipsa in njeni polosi sta 2 in $\frac{2}{3}$.



□

Primer II Predpostavimo, da je $\mathrm{r}(A) = 2$ in $\mathbf{v}_0 \neq \mathbf{0}$.

Ker je A obrnljiva matrika, obstaja tak vektor $\mathbf{u}_0$, da je $A\mathbf{u}_0 = \mathbf{v}_0$. Potem lahko enačbo krivulje (XI.3) preoblikujemo v

$$0 = \langle A\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{v}, A\mathbf{u}_0\rangle + f =$$
$$= \langle A\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle + \frac{1}{2}\langle A\mathbf{v}, \mathbf{u}_0\rangle + \frac{1}{2}\langle A\mathbf{u}_0, \mathbf{v}\rangle + \frac{1}{4}\langle A\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0\rangle - \frac{1}{4}\langle A\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0\rangle + f =$$
$$= \langle A(\mathbf{v} + \frac{1}{2}\mathbf{u}_0), \mathbf{v} + \frac{1}{2}\mathbf{u}_0\rangle - \frac{1}{4}\langle A\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0\rangle + f\,.$$

Če označimo $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \frac{1}{2}\mathbf{u}_0$ in $f' = f - \frac{1}{4}\langle A\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0\rangle$, potem ima krivulja enačbo

$$\langle A\mathbf{v}', \mathbf{v}'\rangle + f' = 0\,.$$

Glede na premaknjeni koordinatni sistem, ima krivulja enačbo brez linearnega dela. Krivulje s tako enačbo pa smo že obravnavali v primeru I. Omenimo še, da glavni osi kvadratne forme $\langle A\mathbf{v}', \mathbf{v}'\rangle$ imenujemo *glavni osi* krivulje (XI.3).

Zgled 2.2 Katera krivulja drugega reda je podana z enačbo

$$10x^2 - 20xy - 5y^2 + 60x - 20 = 0\,?$$

Matrika, ki pripada kvadratni formi $q(x, y) = 10x^2 - 20xy - 5y^2$ je $A = \begin{bmatrix} 10 & -10 \\ -10 & -5 \end{bmatrix}$. Njena determinanta je $\det A = -150$, zato je $r(A) = 2$. Poiščimo koordinatni sistem $\mathbf{v}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$, v katerem ima krivulja enačbo brez linearnega dela. Vektor $\mathbf{v}_0$ za krivuljo je $\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} 60 \\ 0 \end{bmatrix}$. Potem je $\mathbf{u}_0 = A^{-1}\mathbf{v}_0 = \frac{1}{-150}\begin{bmatrix} -5 & 10 \\ 10 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 60 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$. Novi koordinatni sistem je

$$\mathbf{v}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+1 \\ y-2 \end{bmatrix}.$$

V tem koordinatnem sistemu ima krivulja enačbo

$$10x'^2 - 20x'y' - 5y'^2 - 50 = 0\,.$$

Pri tem je $\frac{1}{4}\langle A\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0\rangle = 30$.

Karakteristični polinom za matriko A je $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda - 150 = (\lambda - 15)(\lambda + 10)$. Lastni vrednosti sta $\alpha_1 = 15$ in $\alpha_2 = -10$. Glavni osi sta $V_1 = \mathscr{L}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$ in $V_2 = \mathscr{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$. To sta premici z enačbama $y' = -\frac{1}{2}x'$ in $y' = 2x'$. V originalnih koordinatah sta to premici $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ in $y = 2x + 4$.

V koordinatnem sistemu

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

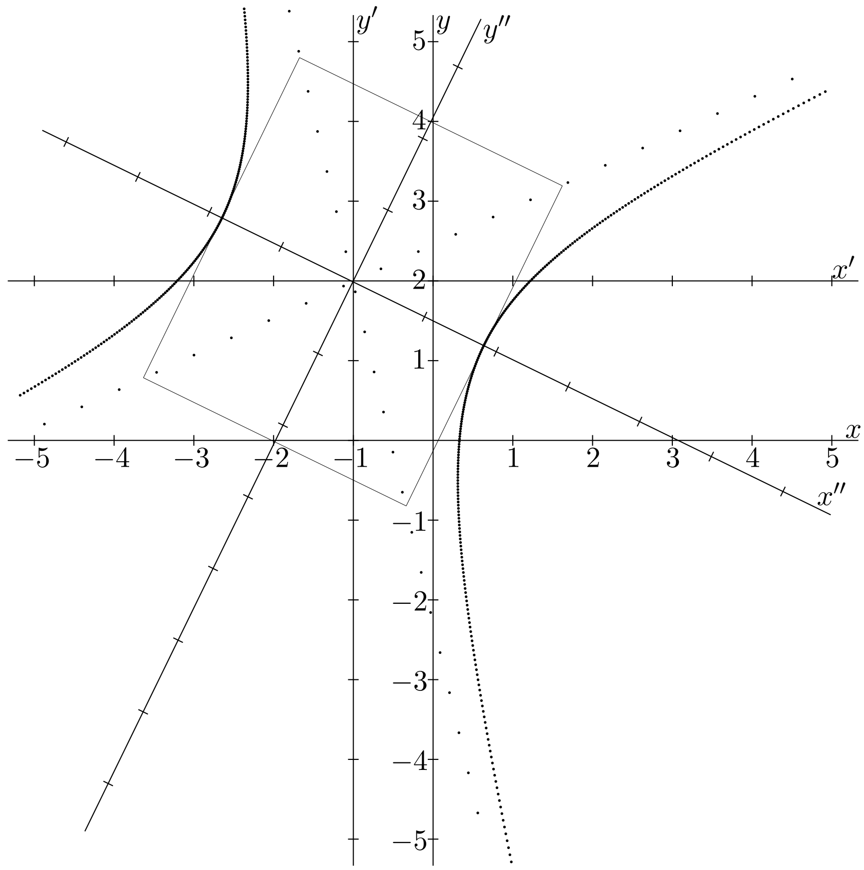
ima krivulja enačbo

$$15x''^2 - 10y''^2 = 50$$

oziroma

$$\frac{x''^2}{\frac{10}{3}} - \frac{y''^2}{5} = 1\,.$$

To je enačba hiperbole, katere polosi sta $\sqrt{\frac{10}{3}}$ in $\sqrt{5}$.



□

Primer III Predpostavimo, da je $\mathrm{r}(A) = 1$.

Potem je $\sigma(A) = \{0, \alpha\}$, kjer je $\alpha \neq 0$. Naj bo $A = PDP^\top$, kjer je P ortogonalna in D diagonalna matrika. Glede na koordinate

$$\mathbf{v}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = P^\top \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ima krivulja enačbo

$$\alpha y'^2 + \gamma x' + \delta y' + \varphi = 0\,.$$

Ker je $\alpha \neq 0$, to enačbo delimo z α in dobimo

$$y'^2 + \frac{\gamma}{\alpha} x' + \frac{\delta}{\alpha} y' + \frac{\varphi}{\alpha} = 0$$

in

$$\left(y' + \frac{\delta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{\gamma}{\alpha}x' + \frac{\varphi}{\alpha} - \frac{\delta^2}{4\alpha^2} = 0\,.$$

Označimo $y'' = y' + \frac{\delta}{2\alpha}$, $\gamma' = \frac{\gamma}{\alpha}$ in $\varphi' = \frac{\varphi}{\alpha} - \frac{\delta^2}{4\alpha^2}$. Enačba krivulje je potem

$$y''^2 + \gamma' x' + \varphi' = 0\,.$$

Ločimo več možnih primerov.

a) Denimo, da je $\gamma' = 0$.
   - Potem v primeru, ko je $\varphi' > 0$ nimamo nobene rešitve,
   - v primeru, ko je $\varphi' = 0$, dobimo eno premico $y'' = 0$ ter
   - v primeru $\varphi' < 0$ dve vzporedni premici $y'' = \pm\sqrt{-\varphi'}$.

b) Če je $\gamma' \neq 0$, označimo $x'' = x' + \frac{\varphi'}{\gamma'}$. Potem ima krivulja enačbo

$$y''^2 + \gamma' x'' = 0\,.$$

   To je enačba *parabole*.

Zgled 2.3 Poiščimo, katero krivuljo predstavlja enačba $x^2 - 2xy + y^2 - 4\sqrt{2}x + 4 = 0$. Kvadratna forma $x^2 - 2xy + y^2$ ima matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

ki ima karakteristični polinom $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda$. Lastni vrednosti sta 0 in 2, rang A je enak 1. Ortonormirana baza iz lastnih vektorjev je $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right\}$ in novi spremenljivki sta

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y \end{bmatrix}.$$

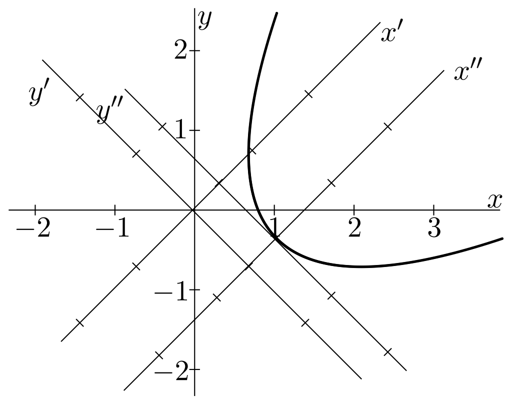
Velja še

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' \end{bmatrix}.$$

Potem je enačba krivulje $2y'^2 - 4x' - 4y' + 4 = 0$, oziroma $y'^2 - 2x' - 2y' + 2 = 0$. Vpeljemo še novi spremenljivki $y'' = y' - 1$ in $x'' = x' - \frac{1}{2}$ in dobimo

$$y''^2 - 2x'' = 0 \quad \text{oziroma} \quad x'' = \frac{1}{2}y''^2\,.$$

To je enačba parabole.



□

Povzemimo: Pokazali smo, da so krivulje drugega reda elipsa, hiperbola in parabola - te imenujemo *neizrojene krivulje drugega reda* - ter prazna množica, točka, premica, par vzporednih in par sekajočih se premic. Te zadnje primere imenujemo izrojeni primeri krivulj drugega reda.

3 Ploskve drugega reda

V $\mathbb{R}^3$ je z enačbo

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + gx + hy + iz + j = 0\,, \tag{XI.8}$$

kjer je vsaj eden od a, b, c, d, e, f neničeln, podana ploskev, ki jo imenujemo *ploskev drugega reda*.

Kvadratna forma, ki pripada ploskvi z enačbo (XI.8), je $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$. Tej pripada matrika $A = \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}$. Linearen del zapišemo v obliki skalarnega produkta $gx + hy + iz = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_0 \rangle$, kjer je $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ in $\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} g \\ h \\ i \end{bmatrix}$. Enačbo (XI.8) lahko zapišemo v obliki

$$\langle A\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_0 \rangle + j = 0\,. \tag{XI.9}$$

Podobna analiza, kot pri krivuljah, nas privede do vseh možnih ploskev drugega reda. Navedli bomo vse možnosti. Spet moramo ločiti več primerov.

Primer I Naj bo $\mathrm{r}(A) = 3$ in $\mathbf{v}_0 = 0$.

Naj bo $A = PDP^\top$, kjer je P ortogonalna in $D = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix}$ diagonalna matrika. V koordinatah

$$\mathbf{v}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = P^\top \mathbf{v}$$

ima ploskev enačbo

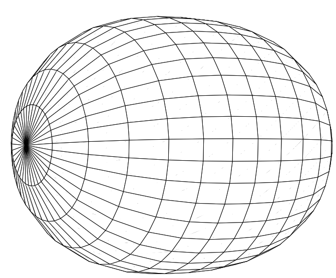
$$\alpha_1 x'^2 + \alpha_2 y'^2 + \alpha_3 z'^2 = \beta\,. \tag{XI.10}$$

Po potrebi pomnožimo enačbo z -1, tako da je $\beta \geq 0$.

a) Privzemimo najprej, da je $\beta > 0$. Sedaj ločimo več možnosti glede na signaturo kvadratne forme

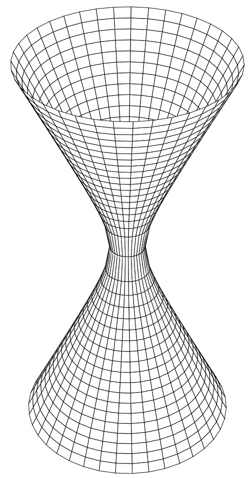
$$\alpha_1 x'^2 + \alpha_2 y'^2 + \alpha_3 z'^2\,. \tag{XI.11}$$

- Če je signatura enaka $(3, 0)$, potem je ploskev (XI.10) *elipsoid*.

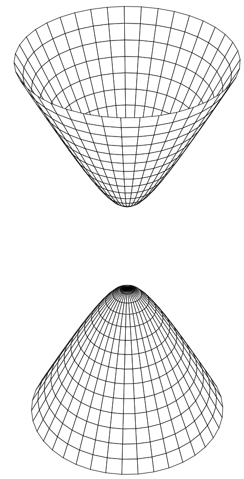


elipsoid

- Če je signatura enaka $(2, 1)$ je ploskev *enodelni hiperboloid*.
- Če je signatura enaka $(1, 2)$, je ploskev *dvodelni hiperboloid*.



enodelni hiperboloid

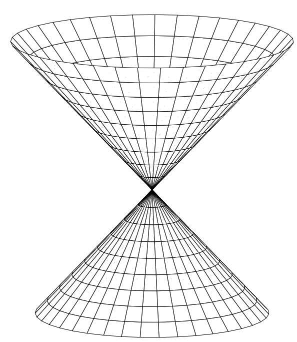


dvodelni hiperboloid

- V primeru, da je signatura enaka $(0,3)$, nobena točka ne ustreza enačbi (XI.10).

b) Obravnavajmo še primer $\beta = 0$.

- Če je signatura kvadratne forme (XI.11) enaka $(3,0)$ ali $(0,3)$, dobimo samo točko $(0,0,0)$.
- Če je signatura enaka $(2,1)$ ali $(1,2)$, dobimo (*eliptični*) *stožec*.



eliptični stožec

Primer II Naj bo rang $\mathrm{r}(A) = 3$ in $\mathbf{v}_0 \neq 0$. Označimo z $\mathbf{u}_0$ vektor, za katerega je $A\mathbf{u}_0 = \mathbf{v}_0$. Potem z uvedbo novih spremenljivk $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \frac{1}{2}\mathbf{u}_0$ enačbo (XI.9) prevedemo na obliko brez linearnega dela. To pa smo že obravnavali v primeru I.

Primer III Privzemimo, da $\mathrm{r}(A) = 2$. Z uvedbo novih spremenljivk $\mathbf{v}' = P^\top \mathbf{v}$ prevedemo enačbo (XI.9) v obliko

$$\alpha_1 x'^2 + \alpha_2 y'^2 + \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z' + \gamma = 0\,.$$

Z uvedbo novih spremenljivk $x'' = x' + \frac{\beta_1}{2\alpha_1}$ in $y'' = y' + \frac{\beta_2}{2\alpha_2}$ gornjo enačbo prevedemo na obliko

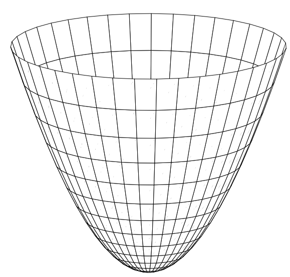
$$\alpha_1 x''^2 + \alpha_2 y''^2 + \beta z' + \gamma = 0\,. \tag{XI.12}$$

Tu smo pisali β namesto β_3. Po potrebi lahko z množenjem z -1 dosežemo, da je $\gamma \leq 0$. Sedaj ločimo več primerov.

a) Če je $\beta \neq 0$, vpeljemo novo spremenljivko $z'' = z' + \frac{\gamma}{\beta}$. Ploskev ima potem enačbo

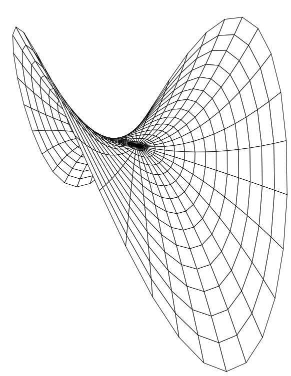
$$\alpha_1 x''^2 + \alpha_2 y''^2 + \beta z'' = 0\,.$$

- Če je signatura kvadratne forme $\alpha_1 x''^2 + \alpha_2 y''^2$ enaka $(2, 0)$ ali $(0, 2)$, dobimo *eliptični paraboloid*.



eliptični paraboloid

- Če je signatura enaka $(1, 1)$, pa dobimo *hiperbolični paraboloid* (ali sedlo).

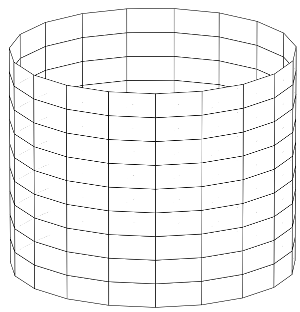


hiperbolični paraboloid

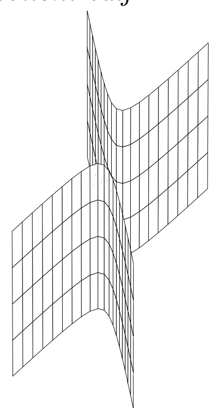
b) Če pa je $\beta = 0$ in $\gamma < 0$, potem imamo enačbo

$$\alpha_1 x''^2 + \alpha_2 y''^2 + \gamma = 0\,. \tag{XI.13}$$

- Če je signatura kvadratne forme $\alpha_1 x''^2 + \alpha_2 y''^2$ enaka $(2,0)$, dobimo *eliptični valj*.
- Če je signatura enaka $(1,1)$, dobimo *hiperbolični valj*.



eliptični valj



hiperbolični valj

- V primeru, da je signatura enaka $(0,2)$, nobena točka ne ustreza enačbi (XI.13).

c) Zadnja možnost v tem primeru je $\beta = \gamma = 0$. Potem enačba $\alpha_1 x''^2 + \alpha_2 y''^2 = 0$ predstavlja:

- premico, če je signatura kvadratne forme $\alpha_1 x''^2 + \alpha_2 y''^2$ enaka $(2,0)$ ali $(0,2)$.
- dve ravnini, ki se sekata v premici, če je signatura enaka $(1,1)$.

Primer IV Obravnavati moramo še primer, ko je $\mathrm{r}(A) = 1$.

Z uvedbo novih spremenljivk $\mathbf{v}' = P^\top \mathbf{v}$ prevedemo enačbo (XI.9) v obliko

$$\alpha_1 x'^2 + \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z' + \gamma = 0\,.$$

Z uvedbo nove spremenljivke $x'' = x' + \frac{\beta_1}{2\alpha_1}$ dobimo

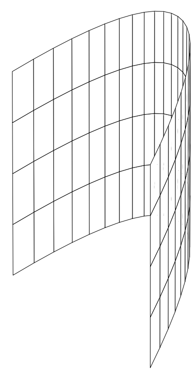
$$\alpha_1 x''^2 + \beta_2 y' + \beta_3 z' + \gamma = 0\,.$$

a) Če je $\beta \neq 0$, potem uvedemo novo spremenljivko $y'' = y' + \frac{\beta_3}{\beta_2} z' + \frac{\gamma}{\beta_2}$,

b) če pa je $\beta_2 = 0$ in $\beta_3 \neq 0$, potem uvedemo novo spremenljivko $y'' = z' + \frac{\gamma}{\beta_3}$. V obeh primerih dobimo enačbo

$$\alpha_1 x''^2 + \beta y'' = 0\,.$$

To je enačba *paraboličnega valja*.



parabolični valj

c) Zadnja možnost, ki še ostane, je primer $\beta_2 = \beta_3 = 0$. Tedaj je enačba oblike $\alpha_1 x''^2 + \gamma = 0$, oziroma

$$x''^2 = -\frac{\gamma}{\alpha_1}\,.$$

- Če je $\frac{\gamma}{\alpha_1} > 0$, potem nimamo rešitve.
- Če je $\gamma = 0$, je dobljena ploskev ravnina,
- če pa je $\frac{\gamma}{\alpha_1} < 0$, dobimo par vzporednih ravnin.

Za konec navedimo še vse možne vrste ploske drugega reda in za vsako enostaven zgled enačbe, ki ji ustreza. Tudi tu ločimo neizrojene in izrojene primere.

Neizrojene ploskve drugega reda so:

vrsta	zgled enačbe
elipsoid	$x^2 + y^2 + z^2 = 1$
enodelni hiperboloid	$x^2 + y^2 - z^2 = 1$
dvodelni hiperboloid	$x^2 - y^2 - z^2 = 1$
stožec	$x^2 + y^2 - z^2 = 0$
eliptični paraboloid	$x^2 + y^2 - z = 0$
hiperbolični paraboloid	$x^2 - y^2 - z = 0$
eliptični valj	$x^2 + y^2 = 1$
hiperbolični valj	$x^2 - y^2 = 1$
parabolični valj	$x^2 - y = 0$

Izrojene ploskve drugega reda so:

vrsta	zgled enačbe
točka	$x^2 + y^2 + z^2 = 0$
premica	$x^2 + y^2 = 0$
dve ravnini	$x^2 - y^2 = 0$
ravnina	$x^2 = 0$
par vzporednih ravnin	$x^2 = 1$
prazna množica	$x^2 = -1$, $x^2 + y^2 = -1$, $x^2 + y^2 + z^2 = -1$

Zgled 3.1 Določimo, katero ploskev predstavlja enačba $2xy + 2xz + z^2 = 1$. Simetrična matrika, ki pripada kvadratni formi $q(x, y, z) = 2xy + 2xz + z^2$, je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Njen karakteristični polinom je $p_A(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda - 1$. Ker je $p_A(-2) > 0$, $p_A(-1) < 0$, $p_A(0) < 0$, $p_A(1) > 0$ in $p_A(2) < 0$, ima $p_A(\lambda)$ eno negativno in dve pozitivni ničli. Signatura kvadratne forme q je $(2, 1)$. Zato enačba predstavlja enodelni hiperboloid. $\square$

Zgled 3.2 Določimo vrsto ploskve drugega reda, podane z enačbo

$$x^2 + 4y^2 + 2z^2 + 4xy + 5x - 2y + 7z + 10 = 0\,.$$

Kvadratna forma je $x^2 + 4y^2 + 2z^2 + 4xy$ in ima simetrično matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rang matrike A je 2. Ker je matrika bločno diagonalna, hitro dobimo njen karakteristični polinom:

$$p_A(\lambda) = (\lambda^2 - 5\lambda)(2 - \lambda) = -\lambda(\lambda - 5)(\lambda - 2)\,.$$

Spekter matrike A je $\sigma(A) = \{0, 2, 5\}$ in signatura kvadratne forme je $(2, 0)$. Izračunajmo glavne osi. Za lastne vrednosti $\alpha = 0$, $\beta = 2$ ter $\gamma = 5$ dobimo

$$A - \alpha\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A - \beta\lambda = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad A - \gamma\lambda = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Pripadajoči lastni vektorji so

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Glavne osi kvadratne forme $\langle A\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle$ so $\mathscr{L}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$, $\mathscr{L}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ ter $\mathscr{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$.

Uvedemo $\mathbf{v}' = P^\top \mathbf{v}$, kjer je $P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Potem je

$$\mathbf{v}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y \\ z \\ \frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y \end{bmatrix} \quad \text{in}$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}z' \\ -\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}z' \\ y' \end{bmatrix}.$$

V novem koordinatnem sistemu je enačba ploskve oblike

$$\begin{aligned} 2y'^2 + 5z'^2 + 5\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}z'\right) - 2\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}z'\right) + 7y' + 10 &= \\ 2y'^2 + 5z'^2 + \frac{12}{\sqrt{5}}x' + 7y' + \frac{1}{\sqrt{5}}z' + 10 &= \\ 2\left(y'^2 + \frac{7}{2}\right) + 5\left(z'^2 + \frac{1}{5\sqrt{5}}z'\right) + \frac{12}{\sqrt{5}}x' + 10 &= 0\,. \end{aligned}$$

Če uvedemo $y'' = y' + \frac{7}{4}$ in $z'' = z' + \frac{1}{10\sqrt{5}}$, dobimo

$$\begin{aligned} 2y''^2 - \frac{49}{8} - \frac{1}{100} + 5z''^2 + \frac{12}{\sqrt{5}}x' + 10 &= \\ 2y''^2 + 5z''^2 + \frac{12}{\sqrt{5}}x' + \frac{773}{200} &= 0\,. \end{aligned}$$

Če sedaj uvedemo še $x'' = x' + \frac{773\sqrt{5}}{2400}$, dobimo enačbo eliptičnega paraboloida:

$$2y''^2 + 5z''^2 + \frac{12}{\sqrt{5}}x'' = 0\,.$$

□