Poglavje VIII

Lastne vrednosti in lastni vektorji

V tem poglavju bomo privzeli, da so skalarji v vektorskih prostorih, koeficienti v matrikah itd., kompleksna števila. Algebraične operacije seštevanja, množenja in množenja s skalarjem so definirane enako in imajo enake lastnosti, kot smo jih opisali za vektorje, matrike, vektorske prostore in linearne preslikave nad realnimi števili. Razlog za tako spremenjen pogled je dejstvo, da ima vsak polinom z realnimi ali kompleksnimi koeficienti ničlo v kompleksnih številih, kar nam pove osnovni izrek algebre. Nad realnimi števili obstajajo polinomi brez realnih ničel, npr. $x^2 + 1$.

1 Definicije

Naj bo dana matrika $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Definicija 1.1 Kompleksno število α imenujemo *lastna vrednost* za A, če obstaja tak neničeln vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$, da je $A\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v}$. Vektor $\mathbf{v}$ imenujemo *lastni vektor* za A pri lastni vrednosti α. $\diamondsuit$

Po definiciji je $\alpha \in \mathbb{C}$ lastna vrednost za $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, če obstaja tak neničeln vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$, da je $A\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v}$, oziroma da velja $(A - \alpha I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Tako smo pokazali naslednjo trditev:

Trditev 1.2 *Kompleksno število α je lastna vrednost za $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ natanko tedaj, ko je* $\ker(A - \alpha I) \neq \mathbf{0}$.

Definicija 1.3 Če je $\alpha \in \mathbb{C}$ lastna vrednost za A, potem vektorski podprostor $\ker(A - \alpha I)$ imenujemo *lastni podprostor* za A pri lastni vrednosti α. $\diamondsuit$

Trditev 1.4 *Množica lastnih vektorjev pri lastni vrednosti α skupaj z vektorjem $\mathbf{0}$ je vektorski podprostor.*

Dokaz Ta množica je ravno lastni podprostor $\ker(A-\alpha I)$. Vemo, da je jedro linearne preslikave vektorski podprostor. ■

Iz gornje trditve sledi, da je α lastna vrednost za A natanko tedaj, ko matrika $A-\alpha I$ ni obrnljiva, oziroma natanko tedaj, ko je

$$\det(A-\alpha I)=0\,.$$

Definicija 1.5 Polinom

$$p_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)$$

v spremenljivki λ imenujemo *karakteristični polinom* matrike A. ◊

Iz pravkar povedanega sledi:

Izrek 1.6 *Kompleksno število α je lastna vrednost matrike A natanko tedaj, ko je α ničla karakterističnega polinoma $p_A(\lambda)$.*

Zgled 1.7 Poiščimo lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje za matriko

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -4 & 2\end{bmatrix}.$$

Karakteristični polinom za A je

$$p_A(\lambda)=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1\\ -4 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)^2-4=\lambda^2-4\lambda\,.$$

Ničli $p_A(\lambda)$ sta $\alpha_1=0$ in $\alpha_2=4$. Pripadajoča lastna vektorja $\mathbf{v}_1$ in $\mathbf{v}_2$ morata rešiti enačbi

$$A\mathbf{v}_1=\mathbf{0}\quad\text{in}\quad(A-4I)\mathbf{v}_2=\mathbf{0}\,.$$

Za rešitvi teh dveh enačb izberemo npr. $\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ in $\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$. □

Zgled 1.8 Poiščimo še lastne vrednosti in lastne vektorje za matriko

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Karakteristični polinom za B je

$$p_B(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1\,.$$

Lastni vrednosti sta kompleksni števili i in $-i$. Lastni vektor $\mathbf{v}_1$, ki pripada lastni vrednosti i zadošča zvezi

$$(A - iI)\,\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}.$$

Izberemo $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$. Podobno za lastni vektor $\mathbf{v}_2$, ki pripada lastni vrednosti $-i$ in zadošča zvezi

$$(A + iI)\,\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \mathbf{v}_2 = \mathbf{0},$$

izberemo $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$. □

Opomba 1.9 Izbira lastnih vektorjev, ki pripadajo dani lastni vrednosti, ni enolična, saj le-ti vedno tvorijo neničeln vektorski podprostor – lastni podprostor. Le-ta je natanko določen če poznamo njegovo bazo. Tako bomo v zgledih (in nalogah) rekli, da so $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ lastni vektorji pripadajoči dani lastni vrednosti α, če je $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ baza za lastni podprostor, ki pripada α. ♢

Trditev 1.10 *Če sta matriki A in B podobni matriki, potem imata enaka karakteristična polinoma.*

Dokaz S P označimo obrnljivo matriko, za katero je $B = PAP^{-1}$. Od tod z uporabo lastnosti determinante sledi

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I) = \det(PAP^{-1} - \lambda I) = \det\big(P(A - \lambda I)P^{-1}\big) = \\ &= \det P \det(A - \lambda I) \det P^{-1} = \det P \det P^{-1} \det(A - \lambda I) = \\ &= \det(A - \lambda I) = p_A(\lambda)\,. \end{aligned}$$

■

Definicija 1.11 Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrika reda n. Potem vsoto $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ vseh diagonalnih elementov matrike A imenujemo *sled matrike* A. Označimo jo s $\operatorname{sl} A$. $\Diamond$

Zgled 1.12 Sled matrike $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ je 4. $\Box$

Trditev 1.13 *Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Potem je karakteristični polinom $p_A(\lambda)$ stopnje n. Njegov vodilni koeficient je enak $(-1)^n$, koeficient pri λ^{n-1} je $(-1)^{n-1} \operatorname{sl} A$ in njegov konstantni člen je enak $\det A$.*

Dokaz Velja

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda) + \text{ členi stopnje največ } n-2 \text{ v } \lambda =$$

$$= (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1} + \text{ členi stopnje največ } n-2 \text{ v } \lambda.$$

Pri tem smo upoštevali, da členi v razvoju determinante, ki so različni od produkta vseh diagonalnih elementov, vsebujejo vsaj dva elementa, ki nista diagonalna.

Konstantni člen polinoma dobimo tako, da vstavimo vrednost $\lambda = 0$. Potem je

$$p_A(0) = \det(A - 0I) = \det A\,. \qquad \blacksquare$$

Zgled 1.14 Če je $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, potem je

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{sl} A\lambda + \det A = \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\,.$$

Npr. za $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ je $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$. $\Box$

Definicija 1.15 Naj bo α lastna vrednost za A. Večkratnost α kot ničle karakterističnega polinoma $p_A(\lambda)$ imenujemo *algebraična večkratnost* lastne vrednosti α. Označimo jo z $\mathrm{a}(\alpha)$. Dimenzijo lastnega podprostora $\ker(A-\alpha I)$ imenujemo *geometrična večkratnost* lastne vrednosti α. Označimo jo z $\mathrm{g}(\alpha)$. $\Diamond$

Zgled 1.16 Poiščimo algebraične in geometrične večkratnosti lastnih vrednosti matrike

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Karakteristični polinom za A je

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2(-\lambda) + 16 + 16 - 8(3-\lambda) + 16\lambda = \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 15\lambda + 8\,. \end{aligned}$$

Opazimo (na primer s pomočjo Hornerjevega algoritma), da je ena ničla $p_A(\alpha)$ enaka $\alpha_1 = -1$. Potem je

$$p_A(\lambda) = (\lambda+1)(-\lambda^2 + 7\lambda + 8) = -(\lambda+1)^2(\lambda-8)\,.$$

Lastni vrednosti sta $\alpha_1 = -1$ in $\alpha_2 = 8$. Njuni algebraični večkratnosti sta $\mathrm{a}(-1) = 2$ in $\mathrm{a}(8) = 1$.
Geometrični večkratnosti poiščemo tako, da izračunamo rang matrik $(A - \alpha_j I)$, $j = 1, 2$. Potem je

$$\mathrm{g}(\alpha_j) = 3 - \mathrm{r}(A - \alpha_j I)\,.$$

Za $\alpha_1 = -1$ imamo

$$A + I = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ker sta poljubni dve vrstici v $A + I$ linearno odvisni, je rang $\mathrm{r}(A + I) = 1$. Potem je $\mathrm{g}(-1) = 3 - 1 = 2$.
Za $\alpha_2 = 8$ dobimo

$$A - 8I = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Z uporabo elementarnih transformacij izračunamo:

$$
\begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \sim_{III} \begin{bmatrix} 2 & -8 & 2 \\ -5 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \sim_{II} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -5 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \sim_I
$$

$$
\sim_I \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & -18 & 9 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \sim_I \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & -18 & 9 \\ 0 & 18 & -9 \end{bmatrix} \sim_I \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & -18 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim_{II} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim_I
$$

$$
\sim_I \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
$$

Zato je $\mathrm{r}(A - 8I) = 2$ in $\mathrm{g}(8) = 1$. □

Izrek 1.17 *Vsota vseh algebraičnih večkratnosti lastnih vrednosti za A je enaka n.*

Dokaz Ker je karakteristični polinom stopnje n, izrek sledi iz osnovnega izreka algebre (glej dodatek C). ■

Trditev 1.18 *Če je A zgornje-trikotna matrika, potem so lastne vrednosti za A ravno vsi diagonalni elementi te matrike.*

Dokaz Vemo, da je determinanta zgornje-trikotne matrike enaka produktu njenih diagonalnih elementov. Zato je v našem primeru

$$
p_A(\lambda) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda)\,.
$$
■

Zgled 1.19 Poiščimo še algebraične in geometrične večkratnosti lastnih vrednosti matrike

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
$$

Hitro izračunamo, da je $p_A(\lambda) = (1-\lambda)^3$. Zato je $\alpha = 1$ edina lastna vrednost matrike A. Njena algebraična večkratnost je $\mathrm{a}(1) = 3$. Ker je

$$
A - I = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},
$$

je $\mathrm{r}(A - I) = 1$ in $\mathrm{g}(1) = 2$. □

Pojme lastna vrednost, lastni vektor, karakteristični polinom defiiramo tudi za linearne preslikave. Kompleksno število α imenujemo *lastna vrednost* za linearno preslikavo $A : V \to V$, če obstaja tak neničeln vektor $\mathbf{v} \in V$, da je $A\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v}$. Vektor $\mathbf{v}$ imenujemo *lastni vektor* za A pri lastni vrednosti α. Geometrična večkratnost lastne vrednosti α je enaka dimenziji jedra $\ker(A - \alpha I)$.

Naj bo $\mathscr{B}$ baza za V in $A_{\mathscr{B}}$ matrika, ki pripada A glede na bazo $\mathscr{B}$. Potem je karakteristični polinom za A definiran kot karakteristični polinom $p_{A_{\mathscr{B}}}(\lambda)$. Označimo ga s $p_A(\lambda)$. Ta definicija je dobra, saj nam trditev 1.10 pove, da imata podobni matriki enak karakteristični polinom. Algebraična večkratnost lastne vrednosti α je stopnja ničle α v karakterističnem polinomu.

Definicija 1.20 Množico vseh lastnih vrednosti matrike $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ imenujemo *spekter matrike* A. Označimo ga s $\sigma(A)$.

Množico vseh lastnih vrednosti linearne preslikave $A : V \to V$ imenujemo *spekter linearne preslikave* A. Označimo ga pravtako s $\sigma(A)$. $\Diamond$

2 Diagonalizacija

Trditev 2.1 *Naj bodo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ različne lastne vrednosti matrike A in $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\ldots$, $\mathbf{v}_k$ pripadajoči lastni vektorji. Potem so vektorji $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ linearno neodvisni.*

Dokaz Vemo, da je $A\mathbf{v}_j = \alpha_j\mathbf{v}_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Linearno neodvisnost vektorjev $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ bomo dokazali z indukcijo na k.

Za $k = 1$ trditev velja, saj je $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$.

Privzemimo, da trditev velja za $k - 1$. Naj bo $\sum_{j=1}^{k} \beta_j\mathbf{v}_j = \mathbf{0}$ za neke skalarje β_j. Potem je

$$\mathbf{0} = A\left(\sum_{j=1}^{k} \beta_j\mathbf{v}_j\right) = \sum_{j=1}^{k} \beta_j A\mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^{k} \beta_j\alpha_j\mathbf{v}_j \tag{VIII.1}$$

$$\text{in} \quad \mathbf{0} = \sum_{j=1}^{k} \beta_j\alpha_k\mathbf{v}_j\,. \tag{VIII.2}$$

Ko odštejemo izraz (VIII.2) od izraza (VIII.1), dobimo

$$\mathbf{0} = \sum_{j=1}^{k-1} \beta_j(\alpha_j - \alpha_k)\mathbf{v}_j\,.$$

Ker so po indukcijski predpostavki vektorji $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{k-1}$ linearno neodvisni, mora biti $\beta_j(\alpha_j - \alpha_k) = 0$ za vse $j = 1, 2, \dots, k-1$. Ker so lastne vrednosti $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ različne, je $\alpha_j - \alpha_k \neq 0$. Zato je $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_{k-1} = 0$. Ker je $\mathbf{v}_k \neq \mathbf{0}$, je tudi $\beta_k = 0$. Zato so vektorji $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ linearno neodvisni. ■

Posledica 2.2 *Če ima matrika $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ n različnih lastnih vrednosti, potem imamo v $\mathbb{C}^n$ bazo $\mathscr{B}$ iz lastnih vektorjev za A. V tej bazi pripada A diagonalna matrika.*

Dokaz Prvi del sledi iz prejšnjega izreka. Če je $\mathscr{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ baza iz lastnih vektorjev, potem je

$$A\mathbf{v}_j = \alpha_j \mathbf{v}_j \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n\,.$$

Zato ima A v bazi $\mathscr{B}$ matriko

$$A_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix}.$$

■

Zgled 2.3 Pokažimo, da ima matrika $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ same različne lastne vrednosti. Zato zanjo obstaja baza iz lastnih vektorjev. Karakteristični polinom za A je

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) + 2 + 12 - 8(2-\lambda) + (1-\lambda) + 3(-1-\lambda) = \\ &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6\,. \end{aligned}$$

Opazimo, da je $\alpha_1 = 1$ ničla $p_A(\lambda)$. Potem je

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + \lambda + 6) = -(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda+2)\,.$$

Spekter A je zato $\sigma(A) = \{1, 3, -2\}$. Algebraične večkratnosti vseh lastnih vrednosti so enake 1. Lastne vektorje poiščemo tako, da rešimo sisteme linearnih enačb $(A - I)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, $(A - 3I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ in $(A + 2I)\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$. Podrobnosti bomo izpustili. Povejmo le, da so možne rešitve

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

V bazi $\mathscr{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ ima A matriko

$$A_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$ □

Definicija 2.4 Naj bo dana matrika $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Če v $\mathbb{C}^n$ obstaja taka baza $\mathscr{B}$, da A pripada diagonalna matrika glede na bazo $\mathscr{B}$, potem rečemo, da se da A *diagonalizirati*.

Ekvivalentno lahko rečemo, da se da A diagonalizirati natanko tedaj, ko obstaja v $\mathbb{C}^n$ kaka baza iz lastnih vektorjev.

Povedano še drugače, matrika A se da diagonalizirati natanko tedaj, ko obstaja taka obrnljiva matrika P, da je

$$D = P^{-1}AP$$

diagonalna matrika. Pri tem je P prehodna matrika med bazo $\mathscr{B}$ iz lastnih vektorjev in standardno bazo $\mathscr{S}$ za $\mathbb{C}^n$.

Postopku iskanja diagonalne matrike za linearno preslikavo ali matriko rečemo *diagonalizacija*. ◊

Izrek 2.5 *Matriko A se da diagonalizirati natanko tedaj, ko je* $\mathrm{a}(\alpha) = \mathrm{g}(\alpha)$ *za vse lastne vrednosti $\alpha \in \sigma(A)$.*

Dokaz Denimo, da se A da diagonalizirati. Potem v neki bazi $\mathscr{B}$ pripada A diagonalna matrika $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Denimo, da je $a = \mathrm{a}(\alpha)$ algebraična večkratnost lastne vrednosti α. Torej se α pojavi na diagonali matrike D natanko a-krat. Potem je rang matrike $D - \alpha I$ enak $n - a$. Zato je $\mathrm{g}(\alpha) = a = \mathrm{a}(\alpha)$.

Dokaz obratne trditve smo za primer $\mathrm{a}(\alpha) = \mathrm{g}(\alpha) = 1$ za vse $\alpha \in \sigma(A)$ že naredili. Dokaz poljubne večkratnosti poteka podobno, le da je indukcijski korak v posplošitvi trditve 2.1 bolj tehnično zapleten in ga ne bomo podrobno navedli. ■

Zgled 2.6 Poglejmo, ali se da matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

diagonalizirati. V zgledu 1.19 smo izračunali, da je

$$\sigma(A) = \{1\} \text{ in } \mathrm{a}(1) = 3 \text{ ter } \mathrm{g}(1) = 2.$$

Ker je $\mathrm{a}(1) \neq \mathrm{g}(1)$, se A ne da diagonalizirati. $\square$

3 Schurov izrek

Izrek 3.1 (**Schurov izrek**) *Naj bo dana matrika $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Potem v $\mathbb{C}^n$ obstaja taka baza $\mathscr{B}$, da je matrika $A_{\mathscr{B}}$ za A v bazi $\mathscr{B}$ zgornje-trikotna. Pri tem lahko bazo $\mathscr{B}$ izberemo tako, da je vrstni red lastnih vrednosti na diagonali matrike $A_{\mathscr{B}}$ poljuben.*

Dokaz Izrek bomo dokazali z indukcijo na n.

Če je $n = 1$, potem ni potrebno ničesar dokazati.

Denimo, da izrek velja za $n-1$ in ga dokažimo za n. Izberimo lastno vrednost $\alpha \in \sigma(A)$. To lahko izberemo poljubno. Naj bo $\mathbf{v}_1$ pripadajoči lastni vektor. Ker je $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, obstaja baza $\mathscr{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, kjer je $\mathbf{v}_1$ prvi lastni vektor. V bazi $\mathscr{B}$ ima A bločno matriko

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \mathbf{u} \\ \mathbf{0} & B \end{bmatrix},$$

kjer je $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^{1\times(n-1)}$, $\mathbf{0} \in \mathbb{C}^{(n-1)\times 1}$ in $B \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$. Po indukcijski predpostavki obstaja taka baza za $\mathbb{C}^{n-1}$, da ima B v bazi $\mathscr{C}$ zgornje-trikotno matriko C. Potem je $B = Q^{-1}CQ$. Naj bo

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

Potem je

$$\begin{aligned} P^{-1}A_{\mathscr{B}}P &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \mathbf{u} \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \alpha & \mathbf{u}Q \\ 0 & Q^{-1}BQ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \mathbf{u}Q \\ 0 & C \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ker je C zgornje-trikotna matrika, je tudi $P^{-1}A_{\mathscr{B}}P$ zgornje-trikotna.

Iz dokaza zgoraj vidimo, da na vsakem koraku indukcije izberemo katerokoli lastno vrednost, ki je še nismo izbrali. Torej je vrstni red lastnih vrednosti na diagonali dobljene zgornje-trikotne matrike lahko poljuben. ■

Posledica 3.2 *Vsaka matrika je podobna zgornje-trikotni matriki.*

Zgled 3.3 Poiščimo bazo za $\mathbb{C}^3$, v kateri matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

pripada zgornje-trikotna matrika. Karakteristični polinom za A je

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (1-\lambda)^2(-1-\lambda) + 4 - 2(1-\lambda) + 2(1+\lambda) = \\ &= -(1-\lambda)^2(1+\lambda) + 4(1+\lambda) = -(1+\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = \\ &= -(1+\lambda)^2(\lambda - 3)\,. \end{aligned}$$

Lastni vrednosti sta $\alpha_1 = -1$ in $\alpha_2 = 3$. Njuni algebraični večkratnosti sta $\mathrm{a}(1) = 2$ in $\mathrm{a}(3) = 1$.

Izberimo $\alpha = \alpha_1 = -1$. Pripadajoči lastni vektor $\mathbf{v}_1$ reši enačbo $(A + I)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$. Izberimo

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Za bazo $\mathscr{B}_1$ vzemimo vektorje $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{e}_2$ in $\mathbf{e}_3$, kjer sta $\mathbf{e}_2$ in $\mathbf{e}_3$ standardna bazna vektorja. Matriko za A v bazi $\mathscr{B}_1$ označimo z A_1. Potem je

$$A_1 = P^{-1}AP\,,$$

kjer je $P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ prehodna matrika. Njen inverz je $P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ in tako je

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Postopek nadaljujemo na matriki $B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. Njen karakteristični polinom je $p_B(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda+1)(\lambda-3)$. Izberimo lastno vrednost $\alpha_2 = 3$. Pripadajoči lastni vektor $\mathbf{u}_2$ reši enačbo

$$(B - 3I)\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}\,.$$

Velja

$$\begin{bmatrix} -3 & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

zato izberemo $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. V bazi $\mathscr{C}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ pripada B matrika

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

V bazi $\mathscr{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ pripada A zgornje-trikotna matrika

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \qquad \square$$

Izrek 3.4 *Naj bo α lastna vrednost za A. Potem je*

$$1 \le \mathrm{g}(\alpha) \le \mathrm{a}(\alpha)\,.$$

Dokaz Če je α lastna vrednost, je $\ker(A - \alpha I) \ne \mathbf{0}$. Zato velja

$$\mathrm{g}(\alpha) = \dim\left(\ker(A - \alpha I)\right) \ge 1.$$

Po Schurovem izreku obstaja taka baza $\mathscr{B}$, da ima A v bazi $\mathscr{B}$ zgornje-trikotno matriko C, ki ima prvih $a = \mathrm{a}(\alpha)$ diagonalnih elementov enakih α, ostali diagonalni elementi pa so različni od α. Bločno lahko zapišemo

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ 0 & C_3 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}^{n \times n},$$

kjer je $C_1 \in \mathcal{C}^{a \times a}$ in je $\sigma(C_1) = \{\alpha\}$ ter $\alpha \notin \sigma(C_3)$. Vemo, da je

$$\mathrm{g}(\alpha) = n - \mathrm{r}(C - \alpha I).$$

Ker je $\alpha \notin \sigma(C_3)$, je rang $\mathrm{r}(C_3 - \alpha I) = n - a$. Potem je

$$\mathrm{r}(C - \alpha I) \geq \mathrm{r}(C_3 - \alpha I) = n - a$$

in

$$\mathrm{g}(\alpha) = n - \mathrm{r}(C - \alpha I) \leq n - n + 1 = a = \mathrm{a}(\alpha)\,. \qquad \blacksquare$$

Zgled 3.5 Vzemimo spet matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

iz zgleda 3.3. Izračunali smo že, da je $\sigma(A) = \{-1, 3\}$, $\mathrm{a}(-1) = 2$ in $\mathrm{a}(3) = 1$. Potem je $\mathrm{g}(3) = 1$. Za $\mathrm{g}(-1)$ imamo dve možnosti, $\mathrm{g}(-1) = 1$ ali $\mathrm{g}(-1) = 2$. Katera nastopi, ugotovimo s pomočjo izračuna ranga $\mathrm{r}(A + I)$:

$$A + I = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim_{III} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim_{I} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim_{II} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ker je $\mathrm{r}(A + I) = 2$, je $\mathrm{g}(-1) = 1$. $\square$

4 Cayley-Hamiltonov izrek

Naj bo dana matrika $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Potem z A^j, $j = 2, 3, \ldots$ označimo potence matrike A. Dogovorimo se, da je

$$A^0 = I \quad \text{in} \quad A^1 = A\,.$$

Definicijo potence A^k lahko razširimo še na polinome: Če je

$$p(\lambda) = a_k \lambda^k + a_{k-1} \lambda^{k-1} + \cdots + a_1 \lambda^1 + a_0$$

polinom stopnje k in so $a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1, a_0$ kompleksna števila, potem definiramo na očiten način

$$p(A) = a_k A^k + a_{k-1} A^{k-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I.$$

Zgled 4.1 Če je $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ in je $p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda - 2$, potem poiščimo $p(A)$. S potenciranjem matrike A dobimo

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Tako je

$$p(A) = A^3 - A - 2I = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}. \qquad \square$$

Trditev 4.2 *Če sta $p(\lambda)$ in $q(\lambda)$ dva polinoma, potem matriki $p(A)$ in $q(A)$ komutirata:*

$$p(A)q(A) = q(A)p(A)\,.$$

Dokaz Če sta $p(\lambda)$ in $q(\lambda)$ potenci, npr. $p(\lambda) = \lambda^j$ in $q(\lambda) = \lambda^k$, potem je

$$p(A)q(A) = A^j A^k = A^{k+j} = A^k A^j = q(A)p(A)\,. \tag{VIII.3}$$

Naj bo sedaj $p(\lambda) = \sum_{j=0}^r a_j \lambda^j$ in $p(\lambda) = \sum_{k=0}^s b_k \lambda^k$. Z uporabo dejstva (VIII.3) potem dobimo

$$\begin{aligned} p(A)q(A) &= \left(\sum_{j=0}^r a_j A^j\right)\left(\sum_{k=0}^s b_k A^k\right) = \sum_{j=0}^r \sum_{k=0}^s a_j b_k A^j A^k = \\ &= \sum_{j=0}^r \sum_{k=0}^s a_j b_k A^k A^j = \sum_{j=0}^r \sum_{k=0}^s b_k a_j A^k A^j = \\ &= \left(\sum_{k=0}^s b_k A^k\right)\left(\sum_{j=0}^r a_j A^j\right) = q(A)p(A)\,. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ dana matrika in $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ neničeln vektor. Potem obstaja najmanjše tako število $k \geq 1$, da je množica vektorjev

$$\mathscr{V}_1 = \{\mathbf{v}, A\mathbf{v}, A^2\mathbf{v}, \ldots, A^{k-1}\mathbf{v}\}$$

linearno neodvisna in je množica vektorjev

$$\mathscr{V}_2 = \{\mathbf{v}, A\mathbf{v}, A^2\mathbf{v}, \ldots, A^{k-1}\mathbf{v}, A^k\mathbf{v}\}$$

linearno odvisna. Torej vektor $A^k\mathbf{v}$ pripada vektorskemu prostoru $\mathscr{L}(\mathbf{v}, A\mathbf{v}, \ldots, A^{k-1}\mathbf{v})$, ki ima bazo $\mathscr{V}_1$. Vektor $A^k\mathbf{v}$ lahko enolično razvijemo po bazi $\mathscr{V}_1$:

$$A^k\mathbf{v} = a_0\mathbf{v} + a_1 A\mathbf{v} + \cdots + a_{k-1}A^{k-1}\mathbf{v}\,.$$

Potem je

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= A^k\mathbf{v} - a_{k-1}A^{k-1}\mathbf{v} - a_{k-2}A^{k-2}\mathbf{v} - \cdots - a_1 A\mathbf{v} - a_0\mathbf{v} = \\ &= (A^k - a_{k-1}A^{k-1} - a_{k-2}A^{k-2} - \cdots - a_1 A - a_0 I)\mathbf{v}\,.\end{aligned}$$

Polinom

$$p_{A,\mathbf{v}}(\lambda) = \lambda^k - a_{k-1}\lambda^{k-1} - a_{k-2}\lambda^{k-2} - \cdots - a_1\lambda - a_0$$

imenujemo *minimalni polinom za vektor* $\mathbf{v}$ *glede na matriko* A. Z zgoraj opisanim postopkom je $p_{A,\mathbf{v}}(\lambda)$ enolično definiran. Če bo jasno, za katero matriko gre, potem bomo rekli, da je $p_{A,\mathbf{v}}(\lambda)$ minimalni polinom za $\mathbf{v}$. Iz definicije sledi

$$p_{A,\mathbf{v}}(A)\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Zgled 4.3 Če je $\mathbf{v}$ lastni vektor za A pri lastni vrednosti α, potem je $A\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v}$, oziroma $(A - \alpha I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Minimalni polinom za $\mathbf{v}$ je $p_{A,\mathbf{v}}(\lambda) = \lambda - \alpha$. □

Zgled 4.4 Vzemimo spet matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

iz zgleda 3.3. Poiščimo minimalna polinoma za vektorja $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ glede na A. Poračunajmo:

$$A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad A^2\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Z uporabo vrstičnih elementarnih transformacij na matriki S, katere stolpci so $\mathbf{v}$, $A\mathbf{v}$ in $A^2\mathbf{v}$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

poiščemo njeno vrstično kanonično formo

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ker je rang matrike S_1 enak 2, so vektorji $\mathbf{v}$, $A\mathbf{v}$ in $A^2\mathbf{v}$ linearno odvisni. Ker sta pivota v S_1 v prvih dveh stolpcih, sta vektorja $\mathbf{v}$ in $A\mathbf{v}$ linearno neodvisna. Element $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ v jedru $\ker S$, za katerega je $z = 1$, nam da koeficiente minimalnega polinoma $p_{A,\mathbf{v}}(\lambda)$. Rešitev iskane enačbe $S\mathbf{a} = \mathbf{0}$ je

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Zato je $\mathbf{v} + 2A\mathbf{v} + A^2\mathbf{v} = \mathbf{0}$ in minimalni polinom

$$p_{A,\mathbf{v}}(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2.$$

Za vektor $\mathbf{w}$ izračunamo

$$A\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad , \quad A^2\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad A^3\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 16 \\ 13 \\ 24 \end{bmatrix}.$$

S T označimo matriko, katere stolpci so vektorji $\mathbf{w}$, $A\mathbf{w}$, $A^2\mathbf{w}$ in $A^3\mathbf{w}$:

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 10 & 16 \\ -1 & 3 & 1 & 13 \\ 0 & 4 & 4 & 24 \end{bmatrix}.$$

Vrstična kanonična forma za T je

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ker je rang matrike T_1 enak 3, so vektorji $\mathbf{w}$, $A\mathbf{w}$, $A^2\mathbf{w}$ in $A^3\mathbf{w}$ linearno odvisni (jasno, saj je dimenzija $\mathbb{C}^3$ samo 3). Ker so pivoti v prvih treh stolpcih matrike T_1, so vektorji $\mathbf{w}$, $A\mathbf{w}$ in $A^2\mathbf{w}$ linearno neodvisni. Element

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

v jedru $\ker T$, za katerega je $t = 1$, nam da koeficiente minimalnega polinoma $p_{A,\mathbf{w}}(\lambda)$. Iskana rešitev je

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Torej je $-3\mathbf{w} - 5A\mathbf{w} - A^2\mathbf{w} + A^3\mathbf{w} = \mathbf{0}$ in

$$p_{A,\mathbf{w}}(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda - 3\,.$$

V zgledu 3.3 smo pokazali, da je karakteristični polinom za A enak $p_A(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda + 3$. Torej velja $p_{A,\mathbf{w}}(\lambda) = -p_A(\lambda)$. □

Trditev 4.5 *Stopnja minimalnega polinoma $p_{A,\mathbf{v}}(\lambda)$ je enaka največ n.*

Dokaz Če imamo v $\mathbb{C}^n$ množico $n+1$ vektorjev $\{\mathbf{v}, A\mathbf{v}, \ldots, A^n\mathbf{v}\}$, je ta gotovo linearno odvisna. Zato je najmanjši k, za katerega je množica

$$\left\{\mathbf{v}, A\mathbf{v}, \ldots, A^{k-1}\mathbf{v}\right\}$$

linearno neodvisna, množica

$$\left\{\mathbf{v}, A\mathbf{v}, \ldots, A^{k}\mathbf{v}\right\}$$

pa linearno odvisna, gotovo manjši ali enak n. ■

Dan je polinom $p(\lambda) = \lambda^k - a_{k-1}\lambda^{k-1} - \cdots - a_1\lambda - a_0$. Njegov vodilni koeficient je enak 1 in $k \geq 1$. Potem matriko

$$C(p) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & a_{k-2} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & a_{k-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{k\times k}$$

imenujemo *pridružena matrika* polinoma p. Pri tem se dogovorimo, da za $k = 1$ velja

$$C(\lambda - a_0) = \begin{bmatrix} a_0 \end{bmatrix}.$$

Trditev 4.6 *Naj bo $p_{A,\mathbf{v}}(\lambda)$ minimalni polinom za $\mathbf{v}$ glede na A in naj bo k njegova stopnja. Potem imamo v $\mathbb{C}^n$ tako bazo*

$$\mathscr{B} = \{\mathbf{v}, A\mathbf{v}, A^2\mathbf{v}, \ldots, A^{k-1}\mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_l\},$$

da ima matrika za A glede na $\mathscr{B}$ bločno strukturo

$$A_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} C(p_{A,\mathbf{v}}) & D \\ 0 & E \end{bmatrix}. \tag{VIII.4}$$

Dokaz Naj bo $p_{A,\mathbf{v}} = \lambda^k - a_{k-1}\lambda^{k-1} - \cdots - a_1\lambda - a_0$. Potem je množica $\{\mathbf{v}, A\mathbf{v}, \ldots, A^{k-1}\mathbf{v}\}$ linearno neodvisna in jo lahko dopolnimo do baze $\mathscr{B} = \{\mathbf{v}, A\mathbf{v}, \ldots, A^{k-1}\mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_l\}$ za $\mathbb{C}^n$. Ker je $A(A^j\mathbf{v}) = A^{j+1}\mathbf{v}$ za $j = 0, 1, \ldots, k-1$ in $A(A^{k+1}\mathbf{v}) = A^k\mathbf{v} = a_0\mathbf{v} + a_1A\mathbf{v} + \cdots + a_{k-1}A^{k-1}\mathbf{v}$, ima matrika za A glede na bazo $\mathscr{B}$ res bločno strukturo (VIII.4). ∎

Trditev 4.7 *Naj bo $p(\lambda)$ dan polinom, katerega stopnja je enaka k in ima vodilni koeficient enak 1. Karakteristični polinom pridružene matrike $C(p)$ je potem enak $(-1)^k p(\lambda)$.*

Dokaz Trditev dokažemo z indukcijo na k. Za $k = 1$ trditev očitno drži.

Predpostavimo, da trditev velja za $k-1$. Determinanto

$$p_{C(p)}(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_0 \\ 1 & -\lambda & 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -\lambda & \ldots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & a_{k-1} - \lambda \end{vmatrix}$$

razvijemo po prvi vrstici in dobimo:

$$\begin{aligned} p_{C(p)}(\lambda) &= (-\lambda)p_{C(q)}(\lambda) + (-1)^{k+1}a_0 \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = \\ &= (-\lambda)p_{C(q)}(\lambda) + (-1)^{k+1}a_0, \end{aligned} \tag{VIII.5}$$

kjer je

$$q(\lambda) = \lambda^{k-1} + a_{k-1}\lambda^{k-2} + \cdots + a_2\lambda + a_1$$

polinom stopnje $k-1$. Zanj po indukcijski predpostavki velja

$$p_{C(q)}(\lambda) = (-1)^{k-1} q(\lambda).$$

Iz enakosti (VIII.5) nato dobimo

$$p_{C(p)}(\lambda) = (-1)^k (\lambda q(\lambda) - a_0) = (-1)^k p(\lambda)\,. \qquad \blacksquare$$

Izrek 4.8 *Minimalni polinom $p_{A,\mathbf{v}}(\lambda)$ za vektor $\mathbf{v}$ deli karakteristični polinom $p_A(\lambda)$.*

Dokaz Iz trditve 4.6 sledi, da obstaja taka baza, v kateri A pripada matrika

$$\begin{bmatrix} C(p_{A,\mathbf{v}}) & D \\ 0 & E \end{bmatrix}.$$

Karakteristični polinom $p_A(\lambda)$ je potem enak produktu karakterističnih polinomov $p_{C(p_{A,\mathbf{v}})}(\lambda) p_E(\lambda)$. Po trditvi 4.7 je $p_{C(p_{A,\mathbf{v}})}(\lambda) = (-1)^k p_{A,\mathbf{v}}(\lambda)$, kjer je k stopnja polinoma $p_{A,\mathbf{v}}(\lambda)$. Torej je

$$p_A(\lambda) = p_{C(p_{A,\mathbf{v}})}(\lambda) p_E(\lambda) = (-1)^k p_{A,\mathbf{v}}(\lambda) p_E(\lambda)$$

in zato $p_{A,\mathbf{v}}(\lambda)$ deli $p_A(\lambda)$. $\blacksquare$

Izrek 4.9 (**Cayley-Hamiltonov izrek**) *Če je $p_A(\lambda)$ karakteristični polinom matrike $A \in \mathbb{C}^n$, potem je*

$$p_A(A) = 0\,.$$

Dokaz Očitno je $p_A(A)\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Naj bo $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ neničeln vektor in $p_{A,\mathbf{v}}(\lambda)$ njegov minimalni polinom. Po izreku 4.8 polinom $p_{A,\mathbf{v}}(\lambda)$ deli polinom $p_A(\lambda)$. Torej je $p_A(\lambda) = q(\lambda) p_{A,\mathbf{v}}(\lambda)$ za nek polinom $q(\lambda)$. Vstavimo A namesto λ in izračunajmo vrednost dobljenega izraza na vektorju $\mathbf{v}$:

$$p_A(A)\mathbf{v} = q(A) p_{A,\mathbf{v}}(A)\mathbf{v} = \mathbf{0}\,.$$

Torej je $p_A(A)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ za vse $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ in zato je $p_A(A) = 0$. $\blacksquare$

Zgled 4.10 Za vajo pokažimo, da je $p_A(A) = 0$ za matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Karakteristični polinom za A smo poiskali v zgledu 3.3 in je enak $p_A(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda + 3$. Z zaporednim množenjem dobimo

$$A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 13 & 10 & 9 \\ 7 & 1 & 6 \\ 14 & 4 & 11 \end{bmatrix}. \tag{VIII.6}$$

Enostaven račun pokaže, da je $-A^3 + A^2 + 5A + 3I = 0$. □

Če je A obrnljiva matrika, potem nam Cayley-Hamiltonov izrek da novo metodo za izračun inverza matrike A.

Izrek 4.11 *Naj bo $p_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0)$ karakteristični polinom za A. Če je A obrnljiva, je*

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_2A + a_1I)\,.$$

Dokaz Ker je $p_A(A) = 0$, je $A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I = 0$. Ker je A obrnljiva, je $a_0 = \det A \neq 0$. Torej je

$$\begin{aligned} -a_0I &= A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_2A^2 + a_1A = \\ &= (A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_2A + a_1I)A\,. \end{aligned}$$

Zadnjo enakost delimo z $-a_0$ in pomnožimo z A^{-1}. Tako dobimo

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_2A + a_1I)\,.$$

■

Zgled 4.12 Poiščimo inverz matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Njen karakteristični polinom je enak

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda + 3 = (-1)(\lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda - 3).$$

Zato je $A^{-1} = \frac{1}{3}(A^2 - A - 5I)$. Uporabimo A^2, ki smo ga izračunali v (VIII.6) in dobimo

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -1 \end{bmatrix}. \qquad \square$$

Naj bo $A : V \to V$ linearna preslikava. Potem kompozitum $A \circ A$ označimo z A^2, kompozitum $A^2 \circ A$ z A^3 itd. Preslikave A^j, $j = 2, 3, \dots$ imenujemo *potence linearne preslikave* A. Dogovorimo se, da je

$$A^0 = I \quad \text{in} \quad A^1 = A\,.$$

Če je $A_{\mathscr{B}}$ matrika za A glede na neko bazo $\mathscr{B}$ za V, potem je $A^j_{\mathscr{B}}$ matrika za A^j glede na to bazo, saj je produkt matrik matrika, ki pripada kompozitumu linearnih preslikav. Naj bo dan polinom $p(\lambda) = a_k\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$. Polinom v A definiramo na očiten način:

$$p(A)\mathbf{v} = a_kA^k\mathbf{v} + a_{k-1}A^{k-1}\mathbf{v} + \cdots + a_1A\mathbf{v} + a_0I\mathbf{v}$$

za vse $\mathbf{v} \in V$ in

$$p(A) = a_kA^k + a_{k-1}A^{k-1} + \cdots + a_1A + a_0I.$$

Preslikava $p(A) : V \to V$ je linearna, kar zlahka preverimo. Posledica Cayley-Hamiltonovega izreka za matrike je Cayley-Hamiltonov izrek za linearno preslikavo, ki pove, da je $p_A(A) = 0$.

5 Minimalni polinom

Definicija 5.1 Naj bo dana matrika $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Polinom $m_A(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ imenujemo *minimalni polinom za matriko* A, če velja:

- $m_A(A) = 0$,
- če za nek polinom $q(\lambda)$ velja $q(A) = 0$, potem $m_A(\lambda)$ deli $q(\lambda)$.

Naj bo $A : V \to V$ linearna preslikava. Polinom $m_A(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ imenujemo *minimalni polinom za linearno preslikavo* A, če velja:

- $m_A(A) = 0$,
- če za nek polinom $q(\lambda)$ velja $q(A) = 0$, potem $m_A(\lambda)$ deli $q(\lambda)$. $\Diamond$

Opomba 5.2 Minimalni polinom je s pogojem, da je njegov vodilni koeficient enak 1, natanko določen. $\Diamond$

Zgled 5.3 Če je $A = \alpha I$ za nek skalar α, potem je $m_A(\lambda) = \lambda - \alpha$. $\square$

Iz Cayley-Hamiltonovega izreka sledi naslednja trditev:

Trditev 5.4 *Minimalni polinom deli karakteristični polinom.*

Trditev 5.5 *Minimalni polinom $p_{A,\mathbf{v}}(\lambda)$ za neničeln vektor $\mathbf{v}$ deli minimalni polinom $m_A(\lambda)$.*

Dokaz Minimalni polinom $p_{A,\mathbf{v}}(\lambda)$ je polinom najmanjše stopnje, za katerega je $p_{A,\mathbf{v}}(A)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Ker je $m_A(A)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, je $\operatorname{st} m_A(\lambda) \geq \operatorname{st} p_{A,\mathbf{v}}(\lambda)$. Polinom $m_A(\lambda)$ delimo s $p_{A,\mathbf{v}}(\lambda)$ in dobimo

$$m_A(\lambda) = q(\lambda)p_{A,\mathbf{v}}(\lambda) + r(\lambda)\,, \tag{VIII.7}$$

kjer je $\operatorname{st} r < \operatorname{st} p_{A,\mathbf{v}}(\lambda)$. V izraz (VIII.7) vstavimo A in izračunamo vrednost izraza na vektorju $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{0} = m_A(A)\mathbf{v} = q(A)p_{A,\mathbf{v}}(A)\mathbf{v} + r(A)\mathbf{v} = r(A)\mathbf{v}\,.$$

Ker je $\operatorname{st} r < \operatorname{st} p_{A,\mathbf{v}}(\lambda)$, mora biti $r(\lambda) = 0$. $\blacksquare$

Posledica 5.6 *Če je α lastna vrednost za A, potem $\lambda - \alpha$ deli $m_A(\lambda)$. Karakteristični in minimalni polinom imata iste ničle, lahko z različnimi večkratnostmi.*

Dokaz Naj bo $\mathbf{v}$ lastni vektor za A pri lastni vrednosti α. Potem je $p_{A,\mathbf{v}}(\lambda) = \lambda - \alpha$. Po prejšnji trditvi potem $\lambda - \alpha$ deli $m_A(\lambda)$. Ker to velja za vse lastne vrednosti, so ničle $p_{A,\mathbf{v}}(\lambda)$ in $m_A(\lambda)$ iste. $\blacksquare$

Zgled 5.7 Naj bo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. V zgledu 4.4 smo pokazali, da je minimalni polinom $p_{A,\mathbf{w}}(\lambda)$ za vektor $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ enak $(-1)p_A(\lambda)$. Iz trditev 5.4 in 5.5 sledi, da je $m_A(\lambda) = p_{A,\mathbf{w}}(\lambda) = (-1)p_A(\lambda)$. $\square$

Zgled 5.8 Poiščimo minimalni polinom za $B = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. Karakteristični polinom za B je enak

$$p_B(\lambda) = (\lambda^2 - 8\lambda + 16)(4 - \lambda) = (-1)(\lambda - 4)^3 .$$

Minimalni polinom $m_B(\lambda)$ deli $p_B(\lambda)$ in $\lambda - 4$ deli $m_B(\lambda)$. Zato je $m_B(\lambda)$ eden od polinomov $\lambda - 4$, $(\lambda - 4)^2$ ali $(\lambda - 4)^3$. Z vstavljanjem vidimo, da

$$B - 4I \neq 0 \quad \text{in} \quad (B - 4I)^2 = 0 .$$

Zato je $m_B(\lambda) = (\lambda - 4)^2$. □

6 Spektralni razcep

Trditev 6.1 *Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrika in $p(\lambda)$ nek polinom deljiv z minimalnim polinomom m_A, npr. karakteristični polinom $p = p_A$ ali $p = m_A$. Če je $p(\lambda) = p_1(\lambda)p_2(\lambda)$, kjer sta p_1 in p_2 tuja polinoma, potem je*

$$\mathbb{C}^n = V_1 \oplus V_2 ,$$

kjer je $V_j = \ker p_j(A)$, $j = 1, 2$. Glede na razcep $V_1 \oplus V_2$ ima A matriko oblike

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} . \tag{VIII.8}$$

Dokaz Ker sta p_1 in p_2 tuja polinoma, obstajata taka polinoma q_1 in q_2, da je

$$1 = p_1(\lambda)q_1(\lambda) + p_2(\lambda)q_2(\lambda) . \tag{VIII.9}$$

Za vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ velja $\mathbf{v} = p_1(A)q_1(A)\mathbf{v} + p_2(A)q_2(A)\mathbf{v}$. Označimo

$$\mathbf{v}_2 = p_1(A)q_1(A)\mathbf{v} \text{ in } \mathbf{v}_1 = p_2(A)q_2(A)\mathbf{v}.$$

Potem je $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$. Ker m_A deli p, je $p(A) = 0$. Tako dobimo

$$p_1(A)\mathbf{v}_1 = p_1(A)p_2(A)q_2(A)\mathbf{v} = q_2(A)p(A)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

in

$$p_2(A)\mathbf{v}_2 = p_2(A)p_1(A)q_1(A)\mathbf{v} = q_1(A)p(A)\mathbf{v} = \mathbf{0} .$$

Torej je $\mathbf{v}_j \in \ker p_j(A)$, $j = 1, 2$. Tako smo pokazali, da je $\mathbb{C}^n = V_1 + V_2$. Denimo še, da je $\mathbf{w} \in V_1 \cap V_2$. Zato je $p_1(A)\mathbf{w} = p_2(A)\mathbf{w} = \mathbf{0}$. Uporabimo zvezo (VIII.9) in dobimo

$$\mathbf{w} = q_1(A)p_1(A)\mathbf{w} + q_2(A)p_2(A)\mathbf{w} = \mathbf{0}\,.$$

Vsota $V_1 + V_2$ je direktna vsota.

Ker je $Ap_j(A)\mathbf{v} = p_j(A)A\mathbf{v}$, $j = 1, 2$, slika A vektorje iz V_1 spet v V_1 in vektorje iz V_2 v V_2. ■

Izrek 6.2 (*o spektralnem razcepu*) *Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ in naj bo $p_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda-\alpha_1)^{k_1}(\lambda-\alpha_2)^{k_2}\cdots(\lambda-\alpha_r)^{k_r}$ razcep na linearne faktorje, kjer so $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ vse različne lastne vrednosti za A. Če je $V_j = \ker(A - \alpha_j I)^{k_j}$, $j = 1, 2, \ldots, r$, potem je*

$$\mathbb{C}^n = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_r \tag{VIII.10}$$

spektralni razcep *za $\mathbb{C}^n$ glede na A. Glede na razcep (VIII.10) ima A matriko oblike*

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & A_r \end{bmatrix}.$$

Pri tem je $\sigma(A_j) = \{\alpha_j\}$, $j = 1, 2, \ldots, r$.

Dokaz Naj bo $p_A(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)^{k_1} p_2(\lambda)$. Po prejšnji trditvi je

$$\mathbb{C}^n = V_1 \oplus \ker p_2(A)\,, \tag{VIII.11}$$

kjer je $V_1 = \ker(A - \alpha_1 I)^{k_1}$. Glede na razcep (VIII.11) ima A matriko oblike

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A' \end{bmatrix}.$$

Karakteristični polinom za A' je enak $p_2(\lambda) = (-1)^{k_2+\cdots+k_r}(\lambda-\alpha_2)^{k_2}(\lambda-\alpha_3)^{k_3}\cdots(\lambda-\alpha_r)^{k_r}$. Sedaj prejšnjo trditev uporabimo za A' in polinoma $(\lambda-\alpha_2)^{k_2}$ in $p_3(\lambda)$, za katera je

$$p_2(\lambda) = (\lambda-\alpha_2)^{k_2}p_3(\lambda) \quad \text{in dobimo}$$

$$\mathbb{C}^n = V_1 \oplus V_2 \oplus \ker p_3(A)\,. \tag{VIII.12}$$

Glede na razcep (VIII.12) ima matrika za A obliko

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A'' \end{bmatrix}.$$

Postopek nadaljujemo in po r korakih dobimo iskani spektralni razcep. ■

V izreku o spektralnem razcepu bi namesto karakterističnega polinoma p_A lahko vzeli tudi katerikoli drug polinom deljiv z minimalnim polinomomm_A.

Zgled 6.3 Vzemimo spet matriko $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Njen karakteristični polinom je $p_A(\lambda) = (-1)(\lambda+1)^2(\lambda-3)$. Poiščimo spektralni razcep za $\mathbb{C}^3$ glede na A. Poiskati moramo bazi za vektorska podprostora $V_1 = \ker(A+I)^2$ in
$V_2 = \ker(A-3I)$. Matrika

$$(A+I)^2 = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 3 \\ 8 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

ima vrstično kanonično formo $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{2}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Tako je $V_1 = \mathscr{L}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$.
Matrika

$$A - 3I = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

ima vrstično kanonično formo $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Tako je $V_2 = \mathscr{L}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$. V bazi $\mathscr{B} = \left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$ ima A matriko

$$A_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

□

7 Nekatere posebne vrste matrik in linearnih preslikav

Definicija 7.1 Matriko $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ imenujemo *projektor*, če je $P^2 = P$.
Linearno preslikavo $P : V \to V$ imenujemo *projektor*, če je $P^2 = P$. $\Diamond$

Zgled 7.2 **1.)** V $\mathbb{R}^2$ ali $\mathbb{R}^3$ za pravokotno projekcijo P na premico skozi izhodišče velja $P^2 = P$. Zato je P projektor.

2.) Preslikavi 0 in $I : V \to V$ sta projektorja.

3.) Če je P projektor, je tudi $I - P$ projektor, saj je $(I - P)^2 = I - 2P + P^2 = I - P$. $\square$

Trditev 7.3 *Če je P projektor, $P \neq 0, I$, potem je minimalni polinom za P enak $m_P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda$.*

Dokaz Iz definicije sledi $P^2 - P = 0$. Torej $m_P(\lambda)$ deli $\lambda^2 - \lambda$. Če je $m_P(\lambda) \neq \lambda^2 - \lambda$, mora biti $m_P(\lambda) = \lambda$ ali $m_P(\lambda) = \lambda - 1$. V prvem primeru je $P = 0$, v drugem pa $P = I$. $\blacksquare$

Izrek 7.4 *Naj bo P projektor. Potem je* $\ker(I - P) = \operatorname{im} P$. *Spektralni razcep za $\mathbb{C}^n$ glede na P je*

$$\mathbb{C}^n = \ker P \oplus \operatorname{im} P\,.$$

Glede na ta razcep ima P matriko oblike $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$.

Dokaz Najprej pokažimo, da je $\ker(I - P) = \operatorname{im} P$. Za $\mathbf{u} \in \ker(I - P)$ velja $\mathbf{u} = P\mathbf{u}$. Zato je $\mathbf{u} \in \operatorname{im} P$. Obratno, za $\mathbf{u} \in \operatorname{im} P$ velja $\mathbf{u} = P\mathbf{v}$ za nek $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$. Potem je $(I - P)\mathbf{u} = \mathbf{u} - P\mathbf{u} = P\mathbf{v} - P^2\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Torej je $\mathbf{u} \in \ker(I - P)$.

Iz prejšnje trditve sledi, da je v primeru, ko $P \neq 0, I$, $m_P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda$. Potem je spektralni razcep za P enak

$$\mathbb{C}^n = \ker P \oplus \ker(P - I) = \ker P \oplus \operatorname{im} P\,.$$

Glede na ta razcep ima P matriko

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Zgled 7.5 Pokažimo, da je $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ projektor in poiščimo spektralni razcep glede na P. Zlahka preverimo, da je $P^2 = P$. Ker je $P \neq 0, I$, je $m_P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda$ in $\sigma(P) = \{0, 1\}$. Ker je P zgornje-trikotna matrika, takoj opazimo, da je $\mathrm{g}(0) = 1$ in $\mathrm{g}(1) = 2$.

Izračunamo še

$$\begin{aligned} V_1 &= \ker P = \mathscr{L}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{in} \\ V_2 &= \operatorname{im} P = \mathscr{L}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Glede na razcep $\mathbb{C}^3 = V_1 \oplus V_2$ ima P matriko

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad \square$$

Projektor P je natanko določen, če poznamo njegovo jedro in njegovo sliko. Potem rečemo, da P projicira na $V_2 = \operatorname{im} P$ vzdolž $V_1 = \ker P$.

Zgled 7.6 Poiščimo matriko v standardni bazi za projektor $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ki projicira na $\mathscr{L}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ vzdolž $\mathscr{L}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. (Seveda je tu definicija projektorja nad realnimi števili enaka kot nad kompleksnimi števili: $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je projektor, če je $P^2 = P$.) V bazi $\mathscr{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ ima P matriko

$$P_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Prehodna matrika med standardno bazo $\mathscr{S}$ in bazo $\mathscr{B}$ je

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Potem je

$$P_{\mathscr{S}} = Q P_{\mathscr{B}} Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad \square$$

Definicija 7.7 Matriko $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ imenujemo *involucija*, če je $A^2 = I$.
Linearno preslikavo $A : V \to V$ imenujemo *involucija*, če je $A^2 = I$. $\diamondsuit$

Zgled 7.8 **1.)** Za $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ velja $A^2 = I$, zato je A involucija.

2.) Za zrcaljenje A prek ravnine skozi 0 v $\mathbb{R}^3$ velja $A^2 = I$, zato je A involucija.

3.) Preslikavi I in $-I$ sta involuciji. $\square$

Podobno kot smo pokazali za projektorje trditev 7.3 in izrek 7.4, pokažemo tudi naslednje:

Izrek 7.9 *Če je A involucija, $A \neq \pm I$, potem je $m_A(\lambda) = \lambda^2 - 1$. Velja* $\ker(A - I) = \operatorname{im}(A + I)$ *in* $\ker(A + I) = \operatorname{im}(A - I)$*. Spektralni razcep glede na A je*

$$\mathbb{C}^n = \ker(A - I) \oplus \ker(A + I)\,.$$

Glede na ta razcep ima matrika za A obliko

$$A = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{bmatrix},$$

kjer je I_j identična matrika ustreznega reda.

Definicija 7.10 Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ dana matrika. Rečemo, da je A *nilpotentna matrika*, ali na kratko A je *nilpotent*, če obstaja tako naravno število k, da je $A^k = 0$. Najmanjši tak k imenujemo *red nilpotentnosti* matrike A.

Za linearne preslikave je definicija podobna. Če je $A : V \to V$ linearna preslikava, potem rečemo, da je A *nilpotentna preslikava* ali *nilpotent*, če obstaja tako naravno število k, da je $A^k = 0$. Najmanjši tak k imenujemo *red nilpotentnosti* za A. $\diamondsuit$

Izrek 7.11 *Matrika (linearna preslikava) A je nilpotentna natanko tedaj, ko je* 0 *edina lastna vrednost za A.*

Dokaz Če je A nilpotentna in k red nilpotentnosti za A, je $m_A(\lambda) = \lambda^k$. Ker imata minimalni in karakteristični polinom iste ničle, je $\sigma(A) = \{0\}$.

Obratno, če je $\sigma(A) = \{0\}$, je $p_A(\lambda) = (-1)\lambda^n$. Potem je po Cayley-Hamiltonovem izreku $A^n = 0$. Torej je A nilpotentna. $\blacksquare$

Zgled 7.12 Za $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ velja $A^2 = 0$. Zato je A nilpotent in njegov red nilpotentnosti je 2. $\square$

Trditev 7.13 *Naj bo A nilpotentna matrika in $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ neničeln vektor. Potem je $p_{A,\mathbf{v}}(\lambda) = \lambda^l$ za nek $l \in \mathbb{N}$.*

Dokaz Vemo, da minimalni polinom za vektor $\mathbf{v}$ deli $m_A(\lambda)$. ■

Zgled 7.14 Preverimo, daje $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ nilpotent in poiščimo $p_{A,\mathbf{v}}(\lambda)$ za $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Ker je $p_A(\lambda) = -\lambda^3$, je A nilpotent. Z zaporednim množenjem z A izračunamo

$$A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad A^2\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad A^3\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ker je $p_{A,\mathbf{v}}(\lambda) = \lambda^l$ za nek l, je $p_{A,\mathbf{v}}(\lambda) = \lambda^3$. V bazi $\mathscr{B} = \{\mathbf{v}, A\mathbf{v}, A^2\mathbf{v}\}$ ima A matriko

$$A_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$ □

Zgled 7.15 Preverimo še, da je $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ nilpotent in poiščimo minimalni polinom za vektorja $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Ker je $A^2 = 0$, je A nilpotent in $m_A(\lambda) = \lambda^2$. Z zaporednim množenjem z A dobimo

$$A\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad A^2\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Zato je $p_{A,\mathbf{u}}(\lambda) = \lambda^2$ in $p_{A,\mathbf{v}}(\lambda) = \lambda$. V bazi $\mathscr{B} = \{\mathbf{u}, A\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ ima A matriko

$$A_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$ □

8 Funkcije matrik podobnih diagonalnim

Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix} \tag{VIII.13}$$

diagonalna matrika. Potem za $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ velja

$$A^k = \begin{bmatrix} \alpha_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n^k \end{bmatrix}.$$

Nato sledi, da za polinom $p(\lambda) = a_k\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ velja

$$p(A) = \begin{bmatrix} p(\alpha_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p(\alpha_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p(\alpha_n) \end{bmatrix}.$$

Definicija 8.1 Naj bo f funkcija, ki je definirana na nekem območju Δ v $\mathbb{C}$, ki vsebuje vse lastne vrednosti diagonalne matrike A iz (VIII.13). Potem definiramo

$$f(A) = \begin{bmatrix} f(\alpha_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(\alpha_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f(\alpha_n) \end{bmatrix}.$$

Če pa se matrika A da diagonalizirati, torej je

$$A = PDP^{-1},$$

kjer je D diagonalna matrika, potem definiramo

$$f(A) = Pf(D)P^{-1}.$$

Pri tem je f definirana na območju Δ v $\mathbb{C}$, za katerega velja $\sigma(A) \subseteq \Delta$. $\Diamond$

Zgled 8.2 Izračunajmo $f_j(A)$ za funkcije $f_1(x) = \sin \pi x$, $f_2(x) = \cos \pi x$ in $f_3(x) = \mathrm{e}^x$ ter matriko $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$. Karakteristični polinom za A je $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 1$. Spekter je $\sigma(A) = \{-1, 1\}$. Lastna vektorja sta $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ pri $\alpha_1 = -1$ in $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ pri $\alpha_1 = 1$. Potem je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Za $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ izračunamo

$$f_1(D) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad f_2(D) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad f_3(D) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathrm{e} \end{bmatrix}.$$

Potem je

$$f_1(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad f_2(A) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{in}$$

$$f_3(A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathrm{e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mathrm{e}^{-1} & 2\mathrm{e}^{-1} \\ \mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1} & 2\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1} \end{bmatrix}. \qquad \square$$