Poglavje II

Matrike

Matrika je pravokotna tabela realnih števil. Na primer:

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 3 & -1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 4\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}2 & 7\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}3\\ 2\\ -7\end{bmatrix}.$$

Matrika je sestavljena iz *vrstic* in *stolpcev*. Vrstici matrike

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 3 & -1\end{bmatrix}$$

sta $\begin{matrix}1 & -1 & 1\end{matrix}$ in $\begin{matrix}2 & 3 & -1\end{matrix}$, stolpci te matrike pa so $\begin{matrix}1\\ 2\end{matrix}$, $\begin{matrix}-1\\ 3\end{matrix}$ in $\begin{matrix}1\\ -1\end{matrix}$. Množico vseh matrik z m vrsticami in n stolpci označimo z $\mathbb{R}^{m\times n}$. Elementom $\mathbb{R}^{m\times n}$ rečemo *matrike reda* $m \times n$. Množico vseh matrik z enim stolpcem enačimo z množico vektorjev, to je $\mathbb{R}^{m\times 1} \equiv \mathbb{R}^m$, množico $\mathbb{R}^{1\times 1}$ z $\mathbb{R}$. Matrikam iz množice $\mathbb{R}^{n\times n}$ rečemo *kvadratne matrike reda* n. Kvadratna matrika ima torej enako število stolpcev in vrstic. V kvadratni matriki poznamo tudi pojem *diagonale*.

Tako je na primer diagonala matrike $\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 4\end{bmatrix}$ enaka $\begin{matrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 4\end{matrix}$.

Matrike bomo označevali z velikimi tiskanimi črkami: $A, B, C, S, T, X, \ldots$ Številom, ki nastopajo v matriki, rečemo *elementi matrike*. Za vsak element njegovo lego določimo tako, da povemo, v kateri vrstici in v katerem stolpcu leži. Elementu, ki leži v i-ti vrstici in j-tem stolpcu, rečemo (i, j)-ti element.

Tako je na primer v matriki

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

element na mestu $(1,1)$ enak 1, element na (2,3) pa enak -2.

Za matriko $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ bomo uporabljali splošen zapis

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Pri tem smo (i,j)-ti element označili z a_{ij}. Podobno bomo v matriki B njen (i,j)-ti element označili z b_{ij}, v matriki C s c_{ij}, itd.

Dve matriki A in B iz $\mathbb{R}^{m\times n}$ sta *enaki*, če velja $a_{ij} = b_{ij}$ za $i = 1, 2, \dots, m$ in $j = 1, 2, \dots, n$.

1 Algebraične operacije na matrikah

1.1 Seštevanje matrik in množenje matrik s skalarjem

Naj bosta A in B dve matriki iz $\mathbb{R}^{m\times n}$. Potem je njuna **vsota** enaka

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Zgled 1.1

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$ □

Za poljuben skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ in matriko $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ definiramo **produkt matrike s skalarjem** takole:

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Zgled 1.2

$$-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}. \qquad \square$$

Lastnosti seštevanja matrik:

1.) asociativnost: $(A+B)+C = A+(B+C)$ za vse matrike $A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

2.) enota za seštevanje: matrika $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

$$A + 0 = 0 + A = A \quad \text{za vse } A \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

3.) inverz za seštevanje matrik: $-A + A = 0$ za vse $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Pri tem je $-A = (-1)\cdot A$

4.) komutativnost: $A + B = B + A$ za vse $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Te lastnosti sledijo iz podobnih lastnosti za seštevanje realnih števil in jih ne bomo podrobno dokazovali. Bralec lahko za vajo sam poskusi dokazati katero od lastnosti.

Za seštevanje matrik in množenje matrik s skalarji veljajo naslednje lastnosti:

5.) distributivnost seštevanja matrik in množenja s skalarjem:

$$\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B \quad \text{za vse } A, B \in \mathbb{R}^{m\times n} \text{ in } \alpha \in \mathbb{R},$$

6.) distributivnost seštevanja skalarjev in množenja matrike s skalarjem:

$$(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A \quad \text{za vse } A \in \mathbb{R}^{m\times n} \text{ in } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

7.)

$$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A) \quad \text{za vse } A \in \mathbb{R}^{m\times n} \text{ in } \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

8.) množenje s skalarjem 1: $1 \cdot A = A$ za vse $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Te lastnosti sledijo iz podobnih lastnosti za množenje in seštevanje realnih števil.

1.2 Množenje matrik

Naj bosta $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ dve matriki, za kateri je število stolpcev v A enako številu vrstic v B. Potem zanju definiramo **produkt**

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{kp} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{kp} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{kp} \end{bmatrix}.$$

(i,j)-ti element produkta $A \cdot B$ je enak

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

Produkt $A\cdot B$ je element množice $\mathbb{R}^{m\times p}$. Opozorimo, da je (i,j)-ti element produkta AB enak skalarnemu produktu i-te vrstice matrike A z j-tim stolpcem matrike B.

Zgled 1.3 Naredimo nekaj zgledov množenja matrik:

1.)

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 0 \\ -2 & -1 & -6 \\ 11 & 13 & 3 \end{bmatrix}.$$

2.)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}.$$

3.)

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -10 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}.$$

4.)

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} .$$

5.)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} . \qquad \square$$

Poslej bomo oznako $\cdot$ za produkt matrik izpuščali in pisali na kratko $A \cdot B = AB$.

Lastnosti množenja matrik:

1.) asociativnost: $(AB)C = A(BC)$ za matrike $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ in $C \in \mathbb{R}^{p\times q}$,

2.) enota za množenje je matrika

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

$$\text{Velja} \quad A \cdot I_n = A \quad \text{in} \quad I_m \cdot A = A \quad \text{za vse } A \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

Matriko I_n imenujemo *identična matrika* (reda n). Največkrat bo že iz preostalega teksta jasno, za katero identično matriko gre. Zato bomo indeks n izpuščali in pisali $I_n = I$.

Dokaz Dokaz asociativnosti: (i,j)-ti element produkta AB je $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ in (i,j)-ti element produkta $(AB)C$ je enak

$$\sum_{l=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl} \right) c_{lj} = \sum_{l=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl}c_{lj} \quad . \tag{II.1}$$

Po drugi strani pa je (i,j)-ti element produkta BC enak $\sum_{l=1}^{p} b_{il}c_{lj}$ in (i,j)-ti element produkta $A(BC)$ je enak

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \left(\sum_{l=1}^{p} b_{kl}c_{lj} \right) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \sum_{l=1}^{p} b_{kl}c_{lj} \quad . \tag{II.2}$$

Opazimo, da sta vsoti (II.1) in (II.2) enaki, zato je $(AB)C = A(BC)$.

Zlahka se prepričamo, da je

$$A \cdot I_n = I_m \cdot A = A \ . \qquad \blacksquare$$

Navedimo še tri lastnosti, ki povezujejo seštevanje in množenje matrik ter množenje matrik s skalarjem:

4.) distributivnost:

$$(A+B)C = AC + BC \quad \text{za vse } A, B \in \mathbb{R}^{m\times n} \text{ in } C \in \mathbb{R}^{n\times p},$$

5.) še druga distributivnost:

$$A(B+C) = AB + AC \quad \text{za vse } A \in \mathbb{R}^{m\times n} \text{ in } B, C \in \mathbb{R}^{n\times p},$$

6.)

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B) \quad \text{za vse } \alpha \in \mathbb{R},\ A \in \mathbb{R}^{m\times n} \text{ in } B \in \mathbb{R}^{n\times p}.$$

Dokazi teh lastnosti so podobni kot dokaz asociativnosti in jih ne bomo podrobno navajali.

Množenje matrik ni komutativno. Če je $m \neq n$ in $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, potem je $AB \in \mathbb{R}^{m\times m}$ in $BA \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Torej sta reda kvadratnih matrik AB in BA različna in zato gotovo $AB \neq BA$. Tudi v primeru, ko je $m = n$, komutativnost v splošnem ne velja.

Zgled 1.4 Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Potem je

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ in } BA = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Zato je $BA \neq AB$.

Če je

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

je

$$CD = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad DC = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

in zato matriki C in D komutirata. $\square$

Na kratko obravnavajmo še obstoj inverza za množenje. Inverz matrike A je taka matrika B, da velja $AB = BA = I$. Zato je prvi pogoj za obstoj inverza to, da je A kvadratna matrika. Oglejmo si nekaj zgledov, ki bodo ponazorili razne možnosti. Natančneje pa bomo obstoj inverza obravnavali v nadaljevanju knjige.

Zgled 1.5 **1.)** $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$: Ker je $AB = 0$, za vse $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, A nima inverza.

2.) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$. Ker je $I \cdot I = I$, je $I^{-1} = I$.

3.) Naj bo $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Iščemo tako matriko $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$, da bo $AX = I = XA$. Potem je

$$AX = \begin{bmatrix} x-z & y-z \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zato mora biti $x - z = 1$, $y - z = 0$ in $0 = 1$. Ta zadnja enakost ni izpolnjena in zato enačba $AX = I$ nima rešitve X.

Tako smo opazili, da tudi neničelna matrika nima vedno inverza za množenje.

4.) Naj bo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$. Iščemo tako matriko $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$, da je $AX = XA = I$. Ker mora biti

$$AX = \begin{bmatrix} x+2z & y+2t \\ -2z & -2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

dobimo enačbe $x + 2z = 1$, $y + 2t = 0$, $-2z = 0$ in $-2t = 1$. Rešitev je $z = 0$, $t = -\frac{1}{2}$, $x = 1$ in $y = 1$. Torej je

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Ker je

$$XA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

je X res inverz matrike A. Označimo $X = A^{-1}$. □

1.3 Transponiranje matrik

Na matrikah imamo še eno operacijo - **transponiranje**. Če je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n} \quad \text{, potem matriko}$$

$$A^\top = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

imenujemo *transponiranka matrike* A. Matriko $A^\top$ dobimo iz A tako, da zamenjamo istoležne stolpce in vrstice, oziroma tako, da matriko "prezrcalimo preko diagonale".

Zgled 1.6 Naj bo $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$. Potem je $A^\top = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. □

Lastnosti transponiranja matrik:

1.) $(A^\top)^\top = A$ za vse $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$,

2.) $(\alpha A)^\top = \alpha A^\top$ za vse $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $\alpha \in \mathbb{R}$,

3.) $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$ za vse $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$,

4.) $(AB)^\top = B^\top A^\top$ za vse $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$.

Dokaz Prve tri lastnosti so dokaj očitne in jih ne bomo podrobno dokazovali. Oglejmo si dokaz lastnosti **4.**): (i,j)-ti element produkta AB je enak $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. Zato je (i,j)-ti element transponirane matrike $(BA)^\top$ enak $\sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki}$. Po drugi strani je (i,j)-ti element produkta $B^\top A^\top$ enak skalarnemu produktu i-te vrstice v $B^\top$ z j-tim stolpcem v $A^\top$, oziroma je enak skalarnemu produktu i-tega stolpca v B z j-to vrstico v A. Torej je (i,j)-ti element v $B^\top A^\top$ enak

$$\sum_{k=1}^{n} b_{ki}a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki}.$$

Tako smo pokazali, da je $(AB)^\top = B^\top A^\top$. ■

2 Kvadratne matrike

Oglejmo si sedaj nekaj posebnih vrst kvadratnih matrik. Če je $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ identična matrika, potem za $\alpha \in \mathbb{R}$ matriko

$$\alpha I = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha \end{bmatrix}$$

imenujemo *skalarna matrika*. Matriko oblike

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix}$$

imenujemo *diagonalna matrika*. Pri tem so $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Matrika je diagonalna natanko tedaj, ko so vsi njeni elementi izven diagonale enaki 0.

Matriko oblike

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

imenujemo *zgornje-trikotna* matrika. Matrika je zgornje-trikotna, če so vsi njeni elementi pod diagonalo enaki 0. Podobno je matrika *spodnje-trikotna*, če so vsi njeni elementi nad diagonalo enaki 0, torej, če je oblike

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Z $\mathscr{D}_n$ označimo množico vseh diagonalnih matrik v $\mathbb{R}^{n\times n}$, z $\mathscr{Z}_n$ množico vseh zgornje-trikotnih matrik v $\mathbb{R}^{n\times n}$ in s $\mathscr{S}_n$ množico vseh spodnje-trikotnih matrik v $\mathbb{R}^{n\times n}$. Velja

$$\mathscr{D}_n = \mathscr{S}_n \cap \mathscr{Z}_n \ .$$

Opazimo še več. Če sta D_1 in D_2 dve diagonalni matriki, potem so tudi $D_1 + D_2$, αD_1 in $D_1 D_2$ za vse $\alpha \in \mathbb{R}$ diagonalne matrike. Podobno velja tudi za množico zgornje-trikotnih matrik in za množico spodnje-trikotnih matrik:

- za $A, B \in \mathscr{Z}_n$ je $A + B$, αA in AB spet v $\mathscr{Z}_n$,
- za $A, B \in \mathscr{S}_n$ je $A + B$, αA in AB spet v $\mathscr{S}_n$.

Dokaz Vse lastnosti, razen lastnosti $AB \in \mathscr{Z}_n$, za $A, B \in \mathscr{Z}_n$ in $AB \in \mathscr{S}_n$, za $A, B \in \mathscr{S}_n$, so dokaj očitne. Najprej bomo preverili, da je AB zgornje-trikotna matrika, če sta A in B zgornje trikotni. Če je A zgornje-trikotna, je $a_{ij} = 0$ za $i > j$. Enako je $b_{ij} = 0$ za $i > j$. (i, j)-ti element produkta AB je enak

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad .$$

Privzemimo, da je $i > j$. Ker je $b_{kj} = 0$ za $k > j$ in $a_{ik} = 0$ za $k < i$, je $a_{ik} b_{kj} = 0$ za $k = 1, 2, \ldots, i-1$ in $k = j+1, \ldots, n$. Ker je $i > j$, je $i - 1 \geq j$. Zato je $a_{ik} b_{kj} = 0$ za vse k in produkt AB je spet zgornje-trikotna matrika.

Dokaz za spodnje-trikotne matrike sledi iz dejstva, da je transponiranka spodnje-trikotne matrike zgornje-trikotna in transponiranka zgornje-trikotne matrike spodnje-trikotna.

Za $A, B \in \mathscr{S}_n$ je $A^\top, B^\top \in \mathscr{Z}_n$. Ker je $B^\top A^\top \in \mathscr{Z}_n$, je potem

$$AB = \left((AB)^\top\right)^\top = \left(B^\top A^\top\right)^\top \in \mathscr{S}_n \quad . \qquad \blacksquare$$

Definirajmo še eno vrsto matrik. Matriko $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ imenujemo *simetrična matrika*, če je $A = A^\top$.

Zgled 2.1 Matrika $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ je simetrična. $\square$

Opazimo, da je vsota dveh simetričnih matrik spet simetrična matrika in produkt simetrične matrike s skalarjem je spet simetrična matrika.

Zgled 2.2 Produkt dveh simetričnih matrik ni več nujno simetrična matrika: Za $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ je $AB = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, ki ni simetrična matrika. $\square$

Trditev 2.3 *Če je $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, potem je $AA^\top$ simetrična matrika.*

Dokaz Iz lastnosti transponiranja matrik dobimo

$$\left(AA^\top\right)^\top = \left(A^\top\right)^\top A^\top = AA^\top.$$

Torej je $AA^\top$ res simetrična matrika. ■

3 Elementarne transformacije na matrikah

Imamo tri tipe elementarnih transformacij na vrsticah matrike:

1.) Transformacijo "prištej skalarni večkratnik ene vrstice drugi vrstici" imenujemo *elementarna transformacija tipa I.*

2.) Transformacijo "pomnoži vrstico matrike z neničelnim skalarjem" imenujemo *elementarna transformacija tipa II.*

3.) Transformacijo "zamenjaj dve vrstici" imenujemo *elementarna transformacija tipa III.*

Zgled 3.1 Dana je matrika $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.
Naredimo na njej transformacijo tipa I "prištej (-1)-kratnik prve vrstice drugi vrstici". Po tej transformaciji dobimo matriko $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$. To transformacijo bomo označili z

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \sim_I \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Na novi matriki naredimo sedaj elementarno transformacijo tipa II "pomnoži drugo vrstico z $-\frac{1}{3}$". Po tej transformaciji dobimo matriko

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}.$$

To transformacijo bomo označili z

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \sim_{II} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}.$$

Na tej matriki sedaj naredimo še elementarno transformacijo tipa I "prištej prvi vrstici (-2)-kratnik druge vrstice". Tako dobimo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix} \sim_I \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}.$$ □

Izrek 3.2 (**o vrstični kanonični formi**)
Vsako matriko $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *lahko s pomočjo elementarnih transformacij tipov I, II in III na vrsticah preoblikujemo tako, da za preoblikovano matriko velja:*

- *v vsaki neničelni vrstici je prvi neničelni element z leve enak* 1*,*
- *če je v matriki* i*-ta vrstica ničelna, potem so vse vrstice z indeksom* $k > i$ *enake nič (če so v matriki kake ničelne vrstice, potem so te zbrane v zadnjih vrsticah)*
- *če je* $(i+1)$*-ta vrstica neničelna, potem je prvi neničelni element z leve v* $(i+1)$*-ti vrstici bolj desno kot prvi neničelni element v* i*-ti vrstici,*
- *če je v* j*-tem stolpcu kak prvi neničelni element vrstice, potem je to v* j*-tem stolpcu edini neničelni element.*

Če so za matriko izpolnjeni pogoji izreka 3.2, potem rečemo, da je v *vrstični kanonični formi.* Izreka ne bomo dokazovali. Preden si ogledamo kak zgled, vpeljimo še en nov pojem.

Če za element a_{ij} v matriki A velja

- $a_{ij} = 1$,
- $a_{kl} = 0$ za $k \le i$ in $l > j$,
- $a_{kj} = 0$ za $k < i$,

potem element a_{ij} imenujemo *pivot* (matrike A).

Vsak prvi neničelni element vrstice v vrstični kanonični formi je pivot.

Zgled 3.3 Podajmo nekaj matrik v vrstični kanonični formi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

V prvi matriki so pivoti na mestih $(1,1)$, $(2,2)$ in $(3,4)$, v drugi matriki na mestih $(1,1)$ in $(2,3)$, v zadnji pa na mestih $(1,2)$ in $(2,3)$. □

Zgled 3.4 Poišči vrstično kanonično formo za matriko

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Najprej pomnožimo prvo vrstico z (-1) in jo prištejemo drugi vrstici:

$$\sim_I \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nato pomnožimo prvo vrstico z (-2) in jo prištejemo tretji vrstici:

$$\sim_I \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Prištejemo drugo vrstico tretji vrstici:

$$\sim_I \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Pomnožimo zadnjo vrstico z $\frac{1}{5}$:

$$\sim_{II} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pomnožimo zadnjo vrstico z (-3) in jo prištejemo drugi vrstici:

$$\sim_I \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Prištejemo zadnjo vrstico prvi vrstici:

$$\sim_I \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zaključimo z elementarno transformacijo "prištej prvi vrstici (-3)-kratnik druge vrstice":

$$\sim_I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dobljena matrika je v vrstični kanonični formi in ima tri pivote. To so elementi $(1,1)$, $(2,2)$ in $(3,4)$. $\square$

Zgled 3.5 Vedno pa ne gre iskanje vrstične kanonične forme le s pomočjo elementarnih transformacij tipov I in II. Uporabiti moramo tudi transformacije tipa III. Za zgled poiščimo vrstično kanonično formo za matriko $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
Najprej zamenjajmo prvo in zadnjo vrstico:

$$\sim_{III} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Pomnožimo prvo vrstico z (-2) in jo prištejmo drugi vrstici:

$$\sim_{I} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Pomnožimo drugo vrstico z 2 in jo prištejmo zadnji vrstici:

$$\sim_{I} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Prištejmo drugo vrstico prvi vrstici:

$$\sim_{I} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

in za konec pomnožimo drugo vrstico z (-1):

$$\sim_{II} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dobljena vrstična kanonična forma ima dva pivota na mestih $(1,1)$ in $(2,2)$.□

Algoritem za iskanje vrstične kanonične forme je naslednji:
Postavi $i = 1$, $j = 1$.

Korak 1. - Če je v j-tem stolpcu kak element v vrsticah $i+1, i+2, \ldots, m$ neničeln in je $a_{ij} = 0$, zamenjaj i-to in k-to $(k > i)$ vrstico tako, da bo $a_{ij} \neq 0$.

- Prištej večkratnik i-te vrstice k-ti vrstici $k > i$ tako, da bo $a_{kj} = 0$ za $k = i+1, i+2, \ldots, m$.
- Pomnoži i-to vrstico z a_{ij}^{-1}. Element a_{ij} je pivot.

Postavi $i = i + 1$ in določi novi j tako, da bo

- $a_{kl} = 0$ za $k \geq i+1$ in $l < j$,
- $a_{kj} \neq 0$ za kak $k \geq i+1$.

Če tak k obstaja, potem ponovi korak 1.

Korak 2. Vrstice s pivotom prištej predhodnim vrsticam, tako da bo pivot edini neničeln element v svojem stolpcu.

Za vrstično kanonično formo velja naslednji izrek, ki ga ne bomo dokazali.

Izrek 3.6 *Vsaka matrika ima enolično določeno vrstično kanonično formo. Vrstična kanonična forma ni odvisna od zaporedja izvedenih elementarnih transformacij.*

Definicija 3.7 Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ dana matrika. Številu pivotov v vrstični kanonični formi za A imenujemo *rang* matrike A. Rang označimo z $\mathrm{r}(A)$. $\Diamond$

Zgled 3.8 Matrika $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ iz zgleda 3.4 ima rang enak 3. Matrika $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ iz zgleda 3.5 pa ima rang enak 2. $\Box$

Za rang matrike velja naslednji pomembni izrek, ki ga tu ne bomo dokazali.

Izrek 3.9 *Če sta $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$ in $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ obrnljivi matriki in je $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, potem je*

$$\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(PA) = \mathrm{r}(AQ) = \mathrm{r}(PAQ)\,.$$

4 Elementarne matrike

Elementarne transformacije na vrsticah lahko predstavimo tudi z množenjem s tako imenovanimi *elementarnimi matrikami*. Vpeljimo jih:

Za $i \neq j$, $1 \leq i,j \leq m$ in $\alpha \in \mathbb{R}$ je matrika $E_{ij}(\alpha) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ enaka vsoti identične matrike in matrike, ki ima edini neničeln element na mestu (i,j) enak α. Matrike $E_{ij}(\alpha)$ imenujemo *elementarne matrike tipa I*.

Zgled 4.1 Za $m = 3$ je npr.

$$E_{12}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

in

$$E_{31}(6) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad \square$$

Za $i = 1, 2, \ldots, m$ in $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, je matrika $E_i(\alpha) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ diagonalna matrika, ki ima na diagonali enice povsod razen na i-tem mestu. Element (i,i) je enak α. Matrike $E_i(\alpha)$ imenujemo *elementarne matrike tipa II*.

Zgled 4.2 Za $m = 2$ je $E_1(5) = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, za $m = 4$ pa je

$$E_3(\tfrac{1}{2}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad \square$$

Za $i \neq j$, $1 \leq i < j \leq m$ označimo s P_{ij} matriko, ki jo dobimo iz identične matrike tako, da v i-ti in j-ti vrstici zamenjamo i-ti in j-ti element. Matrike P_{ij} imenujemo *elementarne matrike tipa III*.

Zgled 4.3 Za $m = 3$ imamo tri elementarne matrike tipa III:

$$P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad P_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \qquad \square$$

Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Če množimo A z leve z matriko $E_{ij}(\alpha)$, potem produkt $E_{ij}(\alpha)A$ dobimo iz A tako, da i-ti vrstici prištejemo z α pomnoženo j-to vrstico. Množenje z $E_{ij}(\alpha)$ je torej ekvivalentno ustrezni elementarni transformaciji tipa I.

Podobno je množenje matrike A z $E_i(\alpha)$ z leve ekvivalentno elementarni transformaciji tipa II - pomnoži i-to vrstico z α.

Množenje z matriko P_{ij} z leve pa je ekvivalentno elementarni transformaciji tipa III - zamenjaj i-to in j-to vrstico.

Trditev 4.4 *Elementarne matrike tipa I, II in III so obrnljive.*

Dokaz Inverz matrike $E_{ij}(\alpha)$ je matrika $E_{ij}(-\alpha)$. Npr. $\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$
$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Inverz matrike $E_i(\alpha)$ je $E_i(\alpha^{-1})$.

Za matriko P_{ij} velja $P_{ij}^2 = I$, zato je $P_{ij}^{-1} = P_{ij}$. ■