Dodatek A

Permutacije

Permutacija je bijektivna preslikava iz množice $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ nase. Tu je n naravno število. Permutacije bomo označevali z grškimi črkami $\sigma, \rho, \pi, \tau, \dots$, množico vseh permutacij množice $\{1, 2, \dots, n\}$ pa z oznako Π_n.

Permutacije lahko podamo na več načinov:

a) s tabelo: $\sigma : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$

b) z zaporedjem: $\sigma : (\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \dots, \sigma(n))$

c) s cikli: $\sigma : \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_{k_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{k_1+1} & \dots & j_{k_2} \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} j_{k_{r-1}+1} & \dots & j_{k_r} \end{pmatrix}$.

Pri tem zaporedje različnih naravnih števil $\begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_{k_1} \end{pmatrix}$ imenujemo *cikel* (za σ) če velja $\sigma(j_l) = \sigma(j_{l+1})$, $l = 1, 2, \dots, k-1$ in $\sigma(j_k) = j_1$.

Zgled A.1 **1.)** Vzemimo $n = 5$. Potem je zgled permutacije npr.

$$\sigma : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Zapis σ z zaporedjem je $\sigma : (3, 1, 4, 2, 5)$. Zapis s cikli pa je naslednji:

$$\sigma : \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}.$$

2.) Naj bo $n = 6$ in σ permutacija podana z zaporedjem $\sigma : (6, 5, 1, 4, 2, 3)$. Potem je njen zapis s cikli enak $\sigma : \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}$. $\square$

Trditev A.2 *Vseh različnih permutacij množice* $\{1, 2, \dots, n\}$ *je* $n!$ *(*$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \dots \cdot n$*).*

Dokaz Permutacija je bijektivna preslikava $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$. Za sliko števila 1 imamo n možnosti $1, 2, \ldots, n$, za sliko števila 2 nam potem preostane še $n-1$ možnosti, za sliko števila 3 še $n-2$ možnosti, itd., končno nam za sliko števila n ostane še ena sama možnost. Vseh možnosti je torej $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$. ■

Zgled A.3 Za $n = 2$ imamo dve permutaciji:

- identično permutacijo id : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, s cikli $\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$,

- in transpozicijo σ : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, s cikli $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Za $n = 3$ imamo 6 permutacij:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

□

Definicija A.4 Naj bo σ permutacija množice $\{1, 2, \ldots, n\}$. Potem rečemo, da par $\{i, j\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$ *tvori inverzijo* za σ, če je $i < j$ in $\sigma(i) > \sigma(j)$. Število parov $\{i, j\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, ki tvorijo inverzijo za σ, imenujemo *indeks* permutacije σ. Indeks označimo z $\operatorname{ind} \sigma$. Število $(-1)^{\operatorname{ind} \sigma}$ imenujemo *signatura permutacije* σ. To označimo z $\operatorname{sgn} \sigma$. ◊

Zgled A.5 Poiščimo indeks in signaturo za permutaciji

$$\sigma : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad \tau : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Pari, ki tvorijo inverzijo za σ so: $\{1, 2\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 5\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 4\}$ in $\{3, 5\}$. Tako je $\operatorname{ind} \sigma = 7$ in $\operatorname{sgn} \sigma = -1$.

Pari, ki tvorijo inverzijo za τ so: $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 5\}$, $\{1, 6\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$ in $\{2, 5\}$. Torej je $\operatorname{ind} \tau = 8$ in $\operatorname{sgn} \tau = 1$. □

Trditev A.6 *Če v permutaciji podani z zaporedjem $\sigma : (j_1, j_2, \ldots, j_n)$ zamenjamo dve sosednji števili, je signatura nove permutacije enaka $-\operatorname{sgn} \sigma$.*

Dokaz Označimo novo permutacijo s $\tilde{\sigma}$. Denimo, da smo v σ zamenjali j_i in j_{i+1}. Če par $\{i, i+1\}$ tvori inverzijo za σ, potem par $\{i, i+1\}$ ne tvori inverzije za $\tilde{\sigma}$. Obratno, če par $\{i, i+1\}$ ne tvori inverzije za σ, potem par $\{i, i+1\}$ tvori inverzijo za $\tilde{\sigma}$. Pari $\{k, l\}$, ki tvorijo inverzijo za σ in za katere $k, l \notin \{i, i+1\}$, tvorijo inverzijo tudi za $\tilde{\sigma}$. Če za $k \notin \{i, i+1\}$ par $\{k, i\}$ tvori inverzijo za σ, potem par $\{k, i+1\}$ tvori inverzijo za $\tilde{\sigma}$. Če par $\{k, i+1\}$ tvori inverzijo za σ, potem par $\{k, i\}$ tvori inverzijo za $\tilde{\sigma}$. Torej je $|\operatorname{ind}\tilde{\sigma} - \operatorname{ind}\sigma| = 1$. Zato je $\operatorname{sgn}\tilde{\sigma} = -\operatorname{sgn}\sigma$. ■

Trditev A.7 *Če v permutaciji $\sigma : (j_1, j_2, \ldots, j_n)$ zamenjamo dve števili, je signatura nove permutacije enaka $-\operatorname{sgn}\sigma$.*

Dokaz Denimo, da je permutacija $\tilde{\sigma}$ dobljena iz σ tako, da zamenjamo j_i in j_k, $i < k$.

Potem $\tilde{\sigma}$ dobimo iz σ z zaporednimi zamenjavami sosednjih parov $\{j_i, j_{i+1}\}$, $\{j_i, j_{i+2}\}, \ldots, \{j_i, j_k\}$ (s tem iz σ dobimo permutacijo podano z zaporedjem $(j_1, \ldots, j_{i-1}, j_{i+1}, \ldots, j_k, j_i, j_{k+1}, \ldots, j_n)$) in nato še z zaporednimi zamenjavami parov $\{j_k, j_{k-1}\}, \{j_k, j_{k-2}\}, \ldots, \{j_k, j_{i+1}\}$. Pri vsaki od teh zamenjav se po trditvi A.6 signatura spremeni. Teh zamenjav je $k - i + k - i - 1 = 2k - 2i - 1$, torej liho mnogo. Zato je $\operatorname{sgn}\tilde{\sigma} = -\operatorname{sgn}\sigma$. ■

Izrek A.8 *Permutacija σ in njej inverzna permutacija σ^{-1} imata enak indeks in enako signaturo.*

Dokaz Če par $\{i, j\}$ tvori inverzijo za σ, velja $i < j$ in $\sigma(i) > \sigma(j)$. Potem je

$$\sigma(j) < \sigma(i) \quad \text{in} \quad \sigma^{-1}\big(\sigma(j)\big) = j > i = \sigma^{-1}\big(\sigma(i)\big).$$

Za to par $\{\sigma(j), \sigma(i)\}$ tvori inverzijo za σ^{-1}. Enako pokažemo, da par $\{\sigma(i), \sigma(j)\}$ ne tvori inverzije za σ^{-1}, če par $\{i, j\}$ ne tvori inverzije za σ. Iz povedanega sledi, da imamo bijekcijo med pari, ki tvorijo inverzijo za σ in pari, ki tvorijo inverzijo za σ^{-1}. Zato je $\operatorname{ind}\sigma = \operatorname{ind}\sigma^{-1}$ in $\operatorname{sgn}\sigma = \operatorname{sgn}\sigma^{-1}$. ■

Zgled A.9 Za permutacijo $\sigma : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ je inverzna permutacija $\sigma^{-1} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Pari, ki tvorijo inverzijo za σ, so $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 6\}$ in $\{5, 6\}$. Pari, ki tvorijo inverzijo za σ^{-1}, so $\{1, 2\}$, $\{1, 5\}$, $\{3, 5\}$, $\{4, 5\}$ in $\{4, 6\}$. Tako je $\operatorname{ind}\sigma = \operatorname{ind}\sigma^{-1} = 5$ in $\operatorname{sgn}\sigma = \operatorname{sgn}\sigma^{-1} = -1$. □