Poglavje VII

Linearne preslikave

V tem poglavju bomo vektorske prostore označevali z $U, V, W, \ldots$ Vsi vektorski prostori bodo končnorazsežni. Zaradi enostavnosti bomo privzeli, da je pripadajoči obseg realnih števil. Vse povedano velja tudi za vektorske prostore nad obsegom kompleksnih števil.

1 Definicija linearne preslikave in osnovne lastnosti

Definicija 1.1 Preslikava $A : U \to V$ je *linearna*, če velja:

a) aditivnost: $A(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = A\mathbf{u}_1 + A\mathbf{u}_2$ za vse $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$,

b) homogenost: $A(\alpha \mathbf{u}) = \alpha(A\mathbf{u})$ za vse $\alpha \in \mathbb{R}$ in $\mathbf{u} \in U$. $\Diamond$

Zgled 1.2 **1.)** Naj bo A preslikava iz $\mathbb{R}^2$ v $\mathbb{R}^3$ dana s predpisom

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - y \\ -x + y \\ 3x + 2y \end{bmatrix}.$$

Preverimo, da je A linearna preslikava.

a) Za vektorja $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ iz $\mathbb{R}^2$ velja

$$A\left(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2\right) = A \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) \\ -(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \\ 3(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2x_1 - y_1 \\ -x_1 + y_1 \\ 3x_1 + 2y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_2 - y_2 \\ -x_2 + y_2 \\ 3x_2 + 2y_2 \end{bmatrix} = A\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2,$$

zato je preslikava aditivna.

b) Za vektor $\mathbf{u}$ iz $\mathbb{R}^2$ in skalar α iz $\mathbb{R}$ velja

$$A(\alpha\mathbf{u}) = A \begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha x - \alpha y \\ -\alpha x + \alpha y \\ 3\alpha x + 2\alpha y \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 2x - y \\ -x + y \\ 3x + 2y \end{bmatrix} = \alpha\,(A\mathbf{u})\,.$$

Torej je preslikava tudi homogena in zato linearna.

Opazimo, da lahko vektor $\begin{bmatrix} 2x - y \\ -x + y \\ 3x + 2y \end{bmatrix}$ zapišemo tudi v obliki produkta matrike in vektorja $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 2x - y \\ -x + y \\ 3x + 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

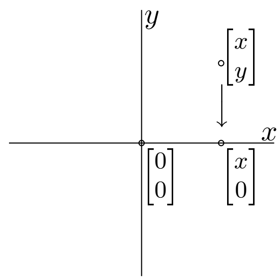
V naslednjem zgledu bomo pokazali, da je množenje vektorjev z dano matriko vedno linearna preslikava.

2.) Naj bo dana matrika $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Potem je preslikava iz $\mathbb{R}^m$ v $\mathbb{R}^n$ definirana s predpisom $\mathbf{u} \mapsto A\mathbf{u}$ linearna, saj iz drugega poglavja vemo, da za množenje vektorjev z matriko velja:

a) $A(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = A\mathbf{u}_1 + A\mathbf{u}_2$,

b) $A(\alpha\mathbf{u}) = \alpha A\mathbf{u}$.

3.) Naj bo $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ pravokotna projekcija na os x. Tako je $A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$. Preslikavo A lahko predstavimo kot preslikavo, ki jo dobimo, če vektor $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ pomnožimo z matriko $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Iz prejšnjega zgleda potem sledi, da je A linearna preslikava.



4.) Preslikava $D : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_{n-1}[x]$ definirana s predpisom $Dp = p'$ (p' je odvod polinoma p) je linearna:

a) $D(p + q) = (p + q)' = p' + q' = Dp + Dq$,

b) $D(\alpha p) = (\alpha p)' = \alpha Dp$.

5.) Podobno kot odvod je tudi določeni integral linearna preslikava. Naj bo $\mathscr{I} : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}$ preslikava določena s predpisom

$$\mathscr{I} p = \int_0^1 p(x)\mathrm{d}x.$$

Potem je $\mathscr{I}$ linearna:

a) $\mathscr{I}(p+q) = \int_0^1 (p(x) + q(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^1 p(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 q(x)\mathrm{d}x = \mathscr{I}p + \mathscr{I}q$,

b) $\mathscr{I}(\alpha p) = \int_0^1 \alpha p(x)\mathrm{d}x = \alpha \int_0^1 p(x)\mathrm{d}x = \alpha(\mathscr{I}p)$.

6.) Transponiranje matrik je linearna preslikava:

$$T : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{n\times m}$$
$$T(A) = A^\top.$$

Aditivnost in homogenost sta ravno dve od lastnosti, ki smo ju dokazali v razdelku 1.3:

a) $T(A + B) = (A + B)^\top = A^\top + B^\top = T(A) + T(B)$,

b) $T(\alpha A) = (\alpha A)^\top = \alpha A^\top = \alpha T(A)$.

7.) Izberimo dve matriki $T \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $S \in \mathbb{R}^{k\times l}$. Potem je preslikava $M : \mathbb{R}^{n\times k} \to \mathbb{R}^{m\times l}$ podana z

$$M(A) = TAS$$

linearna:

a) $M(A+B) = T(A+B)S = TAS + TBS = M(A) + M(B)$,

b) $M(\alpha A) = T(\alpha A)S = \alpha(TAS) = \alpha M(A)$. □

Trditev 1.3 *Preslikava $A : U \to V$ je linearna natanko tedaj, ko velja*

$$A(\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2) = \alpha_1 A\mathbf{u}_1 + \alpha_2 A\mathbf{u}_2$$

za vse $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ in vse $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$.

Dokaz Če je A linearna, potem iz aditivnosti in homogenosti sledi

$$A(\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2) = A(\alpha_1 \mathbf{u}_1) + A(\alpha_2 \mathbf{u}_2) = \alpha_1 A\mathbf{u}_1 + \alpha_2 A\mathbf{u}_2$$

za vse $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$.

Obratno, naj bo $A(\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2) = \alpha_1 A\mathbf{u}_1 + \alpha_2 A\mathbf{u}_2$ za vse $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$. Izberimo $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Potem je $A(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = A\mathbf{u}_1 + A\mathbf{u}_2$ za vse $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$ in zato je A aditivna. Če vzamemo $\alpha_2 = 0$, dobimo $A(\alpha_1 \mathbf{u}_1) = \alpha_1 A\mathbf{u}_1$ in zato je A tudi homogena. ■

Trditev 1.4 *Če je A linearna preslikava, je $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$.*

Dokaz Ker je $\mathbf{0} = (\mathbf{0} + \mathbf{0})$, je $A\mathbf{0} = A(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = A\mathbf{0} + A\mathbf{0}$. Odštejemo $A\mathbf{0}$ in dobimo $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$. ■

Opomba 1.5 Ali je linearna funkcija $f(x) = x + 1$ linearna preslikava? Ker $f(0) = 1 \neq 0$ linearna funkcija $f(x) = x + 1$ *ni* linearna preslikava. Linearna funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ za $a, b \in \mathbb{R}$, je linearna preslikava natanko tedaj, ko je $b = 0$. ◊

Trditev 1.6 *Naj bo $A : U \to V$ linearna preslikava in $\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{u}_i$ linearna kombinacija vektorjev. Potem je $A\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{u}_i\right) = \sum_{i=1}^k \alpha_i A\mathbf{u}_i$.*

Dokaz Uporabimo matematično indukcijo na k in trditev 1.3. ■

Izrek 1.7 *Naj bo $\mathscr{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ baza za vektorski prostor U. Potem je linearna preslikava $A : U \to V$ natanko določena, če poznamo slike baznih vektorjev.*

Dokaz Naj bo $\mathbf{u} \in U$. Potem je razvoj $\mathbf{u}$ po bazi $\mathscr{B}$ enak $\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{u}_n$ za enolično določene skalarje $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Denimo, da poznamo slike baznih vektorjev $A\mathbf{u}_1, A\mathbf{u}_2, \ldots, A\mathbf{u}_n$. Po prejšnji trditvi velja

$$A\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{u}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A\mathbf{u}_i\,.$$

Torej je $A\mathbf{u}$ za vsak $\mathbf{u} \in U$ natanko določen s slikami baznih vektorjev. ■

Posledica 1.8 *Naj bo $\mathscr{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ baza za U in $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ podmnožica vektorjev v V. Potem obstaja natanko ena linearna preslikava $A : U \to V$, za katero je $A\mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i$ za $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Definicija 1.9 Naj bo $A : U \to V$ linearna preslikava. Potem množico

$$\ker A = \{\mathbf{u} \in U \ ; \ A\mathbf{u} = \mathbf{0}\}$$

imenujemo *jedro* linearne preslikave. ◊

Opomba 1.10 Ker je $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$, je $\mathbf{0} \in \ker A$ za vse A. Zato je jedro vedno neprazna množica. ◊

Zgled 1.11 **1.)** Naj bo $D : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ odvod polinoma: $Dp = p'$ za $p \in \mathbb{R}_3[x]$. Potem je $\ker D$ množica vseh konstantnih polinomov:

$$\ker D = \{\alpha \ ; \ \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

2.) Naj bo $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ pravokotna projekcija na os x. Tako je $A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$. Na začetku razdelka smo že preverili, da je A linearna preslikava. Potem je jedro A enako

$$\ker A = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \ ; \ y \in \mathbb{R} \right\}.$$

3.) Naj bo $O : U \to V$ linearna preslikava določena s predpisom $O\mathbf{u} = \mathbf{0}$ za vse $\mathbf{u} \in U$. Potem je $\ker O = U$.

4.) Naj bo $I : U \to U$ linearna preslikava določena s predpisom $I\mathbf{u} = \mathbf{u}$. Potem je $\ker I = \mathbf{0}$. □

Izrek 1.12 *Jedro linearne preslikave $A : U \to V$ je vektorski podprostor v U.*

Dokaz Naj bosta $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ v jedru $\ker A$. Potem je

$$A(\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2) = \alpha_1 A\mathbf{u}_1 + \alpha_2 A\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}\,.$$

Torej je $\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 \in \ker A$ za vse α_1, α_2 in zato je $\ker A$ vektorski podprostor. ■

Izrek 1.13 *Linearna preslikava $A : U \to V$ je injektivna natanko tedaj, ko je* $\ker A = \mathbf{0}$.

Dokaz Naj bo A injektivna preslikava. Ker je $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$, je $A\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ za vse $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. Zato je $\ker A = \mathbf{0}$.

Denimo, da je $\ker A = \mathbf{0}$. Če je $A\mathbf{u}_1 = A\mathbf{u}_2$ za neka $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$, je potem $A(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = A\mathbf{u}_1 - A\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$. Zato je $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \in \ker A$. Tako mora biti $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$, oziroma $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$. Preslikava A je injektivna. ■

Definicija 1.14 Množico

$$\operatorname{im} A = \{\mathbf{v} \in V\ ;\ \text{obstaja tak } \mathbf{u} \in U, \text{ da je } \mathbf{v} = A\mathbf{u}\}$$

imenujemo *slika* linearne preslikave $A : U \to V$. ◊

Zgled 1.15 **1.)** Če je $D : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ linearna preslikava, ki polinom p preslika v njegov odvod, potem je $\operatorname{im} D = \{a + bx + cx^2\ ;\ a, b, c \in \mathbb{R}\}$:
Velja $D(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3) = \beta + 2\gamma x + 3\delta x^2$ in
$D(ax + \frac{b}{2}x^2 + \frac{c}{3}x^3) = a + bx + cx^2$.

2.) Če je $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ podana s predpisom

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix},$$

potem je $\operatorname{im} A = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}\ ;\ x \in \mathbb{R} \right\}$.

3.) Slika linearne preslikave $O : U \to V$, $O\mathbf{u} = \mathbf{0}$ za vse $\mathbf{u} \in U$, je enaka $\mathbf{0}$.

4.) Slika linearne preslikave $I : U \to U$, $I\mathbf{u} = \mathbf{u}$ za vse $\mathbf{u} \in U$, je enaka U.□

Trditev 1.16 *Če je $A : U \to V$ linearna preslikava, potem je njena slika* $\operatorname{im} A$ *vektorski podprostor v V.*

Dokaz Naj bosta $\mathbf{v}_1$ in $\mathbf{v}_2$ v $\operatorname{im} A$. Potem obstajata taka vektorja $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$, da je $A\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$ in $A\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2$. Ker je A linearna, je

$$A(\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2) = \alpha_1 A\mathbf{u}_1 + \alpha_2 A\mathbf{u}_2 = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2$$

za poljubna skalarja $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Zato je $\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 \in \operatorname{im} A$ in je $\operatorname{im} A$ vektorski podprostor. ■

Opomba 1.17 Linearna preslikava A je surjektivna natanko tedaj, ko je $\operatorname{im} A = V$. ◊

Posledica 1.18 *Če je $\mathscr{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ baza za U in je $A : U \to V$ linearna, potem je $\operatorname{im} A = \mathscr{L}(A\mathbf{u}_1, A\mathbf{u}_2, \ldots, A\mathbf{u}_n)$. Preslikava A je surjektivna, če v množici $\{A\mathbf{u}_1, A\mathbf{u}_2, \ldots, A\mathbf{u}_n\}$ obstaja baza za V.*

Posledica 1.19 *Če je $A : U \to V$ linearna, potem je*

$$\dim(\operatorname{im} A) \leq \dim U\,.$$

Trditev 1.20 *Naj bosta $A : U \to V$ in $B : V \to W$ linearni preslikavi. Potem je tudi kompozitum (produkt) $BA : U \to W$ linearna preslikava.*

Dokaz Za poljubna vektorja $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$ in poljubna skalarja $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ velja

$$BA(\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2) = B(\alpha_1 A\mathbf{u}_1 + \alpha_2 A\mathbf{u}_2) = \alpha_1 BA\mathbf{u}_1 + \alpha_2 BA\mathbf{u}_2\,.$$

Zato je BA linearna preslikava. ■

Izrek 1.21 *Naj bo $A : U \to V$ obrnljiva linearna preslikava. Potem je tudi njen inverz $A^{-1} : V \to U$ linearna preslikava.*

Dokaz Naj bosta $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ in $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Potem je $A\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$ in $A\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2$ za enolično določena vektorja $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$. Ker je A linearna, je

$$A(\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2) = \alpha_1 A\mathbf{u}_1 + \alpha_2 A\mathbf{u}_2 = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2.$$

Zato je

$$A^{-1}(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2) = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 = \alpha_1 A^{-1}\mathbf{v}_1 + \alpha_2 A^{-1}\mathbf{v}_2\,.$$

Preslikava A^{-1} je linearna. ■

Zgled 1.22 Dana je matrika $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Linearna preslikava $\mathscr{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je definirana kot množenje z matriko A: $\mathscr{A}\mathbf{u} = A\mathbf{u}$. Potem je $\mathscr{A}^{-1}$ množenje z matriko $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Velja namreč $\mathscr{A}^{-1}(\mathscr{A}(\mathbf{u})) = A^{-1}A\mathbf{u} = \mathbf{u}$ in $\mathscr{A}\left(\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{u})\right) = AA^{-1}\mathbf{u} = \mathbf{u}$. Geometrično predstavlja preslikava $\mathscr{A}$ zasuk za $\frac{\pi}{2}$ okoli točke $\mathbf{0}$ v pozitivni smeri (tj. smeri nasprotni smeri urinega kazalca). Potem je $\mathscr{A}^{-1}$ zasuk za $-\frac{\pi}{2}$ okoli točke $\mathbf{0}$. $\square$

2 Matrika prirejena linearni preslikavi

Naj bo $A : U \to V$ linearna preslikava. Izberimo bazi $\mathscr{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ za U in $\mathscr{C} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ za V. Po izreku 1.7 je A natanko določena, če poznamo slike baznih vektorjev $A\mathbf{u}_1, A\mathbf{u}_2, \ldots, A\mathbf{u}_n$. Razvijmo te vektorje po bazi $\mathscr{C}$:

$$\begin{aligned} A\mathbf{u}_1 &= \alpha_{11}\mathbf{v}_1 + \alpha_{21}\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_{m1}\mathbf{v}_m \\ A\mathbf{u}_2 &= \alpha_{12}\mathbf{v}_1 + \alpha_{22}\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_{m2}\mathbf{v}_m \\ &\vdots \\ A\mathbf{u}_n &= \alpha_{1n}\mathbf{v}_1 + \alpha_{2n}\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_{mn}\mathbf{v}_m \end{aligned}$$

Koeficienti razvoja tvorijo matriko:

$$A_{\mathscr{B}\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}.$$

To matriko imenujemo *matrika prirejena linearni preslikavi* glede na bazi $\mathscr{B}$ in $\mathscr{C}$.

Opozorimo, da koeficienti razvoja $A\mathbf{u}_1$ po bazi $\mathscr{C}$ tvorijo *prvi stolpec* matrike $A_{\mathscr{B}\mathscr{C}}$, koeficienti razvoja $A\mathbf{u}_2$ tvorijo *drugi stolpec* itd.

Zgled 2.1 1.) Poiščimo matriko prirejeno linearni preslikavi

$$D : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_2[x], \; Dp = p',$$

glede na bazi $\mathscr{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ in $\mathscr{C} = \{1, x, x^2\}$. Velja $D1 = 0, Dx = 1, Dx^2 = 2x, Dx^3 = 3x^2$. Zato je matrika enaka

$$D_{\mathscr{B}\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

2.) Naj bosta $\mathscr{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ in $\mathscr{C} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ bazi za vektorski prostor U. Kaj je matrika za identično preslikavo $I : U \to U$ glede na bazi $\mathscr{B}$ in $\mathscr{C}$? Če je $\mathbf{u}_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\mathbf{v}_i$, potem je

$$I_{\mathscr{B}\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}.$$

To pa je ravno prehodna matrika med bazo $\mathscr{B}$ in bazo $\mathscr{C}$. □

Vrnimo se k splošnemu primeru iz začetka razdelka. Vektor $\mathbf{u} \in U$ razvijemo po bazi $\mathscr{B}$ in dobimo

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \mathbf{u}_j.$$

Naj bo $A\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \mathbf{v}_i$ razvoj vektorja $A\mathbf{u}$ po bazi $\mathscr{C}$. Potem je

$$\sum_{i=1}^{m} \gamma_i \mathbf{v}_i = A\mathbf{u} = A\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j \mathbf{u}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j A\mathbf{u}_j =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \beta_j \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}\mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\beta_j\right) \mathbf{v}_i\,.$$

Ker je razvoj vektorja po bazi enolično določen, mora biti

$$\gamma_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\beta_j \quad \text{za } i = 1, 2, \ldots, m.$$

Zapišimo to v matrični obliki:

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \tag{VII.1}$$

Koeficiente razvoja $A\mathbf{u}$ po bazi $\mathscr{C}$ dobimo tako, da vektor koeficientov razvoja $\mathbf{u}$ po bazi $\mathscr{B}$ pomnožimo z matriko prirejeno A glede na ti dve bazi.

Zveza (VII.1) je *osnovna* za ves nadaljnji študij v tej knjigi. Povezuje abstraktni pogled na linearno algebro preko vektorskih prostorov in linearnih preslikav z vektorji (elementi $\mathbb{R}^n$) in matrikami. Poslej bomo uporabljali oba pogleda. Abstraktni pogled nam omogoča bolj strnjeno formulacijo trditev in izrekov in nam olajša tehnično zapletenost. Konkretni pogled prek n-teric in matrik pa nam omogoča izračune v konkretnih primerih in je najpomembnejši zgled abstraktnega pogleda. Ker ima vsak od obeh pogledov svoje prednosti (in slabosti), bomo uporabljali oba.

Izrek 2.2 *Če sta $A : U \to V$ in $V \to W$ linearni preslikavi in so $\mathscr{B}$ baza za U, $\mathscr{C}$ baza za V ter $\mathscr{D}$ baza za W, je*

$$(BA)_{\mathscr{B}\mathscr{D}} = B_{\mathscr{C}\mathscr{D}} A_{\mathscr{B}\mathscr{C}}\,. \tag{VII.2}$$

Dokaz Elemente baze $\mathscr{B}$ označimo z $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$, elemente baze $\mathscr{C}$ z $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ in elemente baze $\mathscr{D}$ z $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_r$. Matriki $A_{\mathscr{B}\mathscr{C}}$ in $B_{\mathscr{C}\mathscr{D}}$ sta določeni s koeficienti razvojev

$$A\mathbf{u}_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \mathbf{v}_i$$

in

$$B\mathbf{v}_i = \sum_{k=1}^{r} \beta_{ki} \mathbf{w}_k\,.$$

Matrika za BA glede na bazi $\mathscr{B}$ in $\mathscr{D}$ je določena s koeficienti razvoja

$$BA\mathbf{u}_j = \sum_{k=1}^{r} \gamma_{kj} \mathbf{w}_k\,. \tag{VII.3}$$

Ker sta A in B linearni preslikavi, velja

$$\begin{aligned} BA\mathbf{u}_j &= B\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}\mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} B\mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \sum_{k=1}^{r} \beta_{ki}\mathbf{w}_k = \\ &= \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{m} \beta_{ki}\alpha_{ij}\right) \mathbf{w}_k\,. \end{aligned} \tag{VII.4}$$

Iz lastnosti (VII.3) in (VII.4) sledi $\gamma_{kj} = \sum_{i=1}^{m} \beta_{ki}\alpha_{ij}$ za vse k in j, kar je ekvivalentno matrični enakosti $(BA)_{\mathscr{B}\mathscr{D}} = B_{\mathscr{C}\mathscr{D}} A_{\mathscr{B}\mathscr{C}}$. ■

Enakost (VII.2) nam razloži, zakaj je množenje matrik smiselno definirati, tako kot smo to naredili v poglavju II.

3 Prehod na novi bazi

Matrika prirejena linearni preslikavi je odvisna od izbire baz. Zanima nas, kako poiskati matriko za linearno preslikavo $A : U \to V$ v novih bazah.

Naj bosta $\mathscr{B}_1$ in $\mathscr{B}_2$ bazi za U ter $\mathscr{C}_1$ in $\mathscr{C}_2$ bazi za V. Na kratko označimo z A_1 matriko za A v bazah $\mathscr{B}_1$ in $\mathscr{C}_1$. Tako imenovan prehod na novi bazi ponazorimo z naslednjim diagramom:

$$\begin{tikzcd}
(U,\mathscr{B}_1) \arrow[r, "A_1"] \arrow[d, "P=I_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}"'] & (V,\mathscr{C}_1) \arrow[d, "Q=I_{\mathscr{C}_1\mathscr{C}_2}"] \\
(U,\mathscr{B}_2) \arrow[r, "A_2"] & (V,\mathscr{C}_1)
\end{tikzcd} .$$

Pri tem je $P = I_{\mathscr{B}_1\mathscr{B}_2}$ prehodna matrika med bazama $\mathscr{B}_1$ in $\mathscr{B}_2$ ter $Q = I_{\mathscr{C}_1\mathscr{C}_2}$ prehodna matrika med bazama $\mathscr{C}_1$ in $\mathscr{C}_2$. Iz izreka 2.2 sledi naslednji izrek:

Izrek 3.1 *Naj bodo A_1, A_2, P in Q kot zgoraj. Potem je*

$$A_2 = QA_1P^{-1}.$$

Dokaz Po izreku 2.2 je

$$\begin{aligned}
A_2 &= (I_V A I_U)_{\mathscr{B}_2\mathscr{C}_2} = (I_V)_{\mathscr{C}_1\mathscr{C}_2}(AI_U)_{\mathscr{B}_2\mathscr{C}_1} = (I_V)_{\mathscr{C}_1\mathscr{C}_2}(A)_{\mathscr{B}_1\mathscr{C}_1}(I_U)_{\mathscr{B}_2\mathscr{B}_1} = \\
&= QA_1P^{-1}.
\end{aligned}$$

Pri tem iz zgleda 2.1.**2** vemo, da je $(I_U)_{\mathscr{B}_2\mathscr{B}_1}$ prehodna matrika med bazama $\mathscr{B}_2$ in $\mathscr{B}_1$ ter $(I_V)_{\mathscr{C}_1\mathscr{C}_2}$ prehodna matrika med bazama $\mathscr{C}_1$ in $\mathscr{C}_2$. ■

Zgled 3.2 Naj bo $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ pravokotna projekcija na premico p, ki je presek ravnin $x - y + z = 0$ in $x + y - z = 0$. Preverimo najprej, da je A linearna preslikava. Če je $v \in \mathbb{R}^3$, potem je

$$A\mathbf{v} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{s} \rangle}{\langle \mathbf{s}, \mathbf{s} \rangle}\mathbf{s},$$

kjer je $\mathbf{s}$ smerni vektor premice p. Z uporabo linearnosti skalarnega produkta dobimo

$$\begin{aligned}
A(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2) &= \frac{\langle \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2, \mathbf{s} \rangle}{\langle \mathbf{s}, \mathbf{s} \rangle}\mathbf{s} = \alpha_1\frac{\langle \mathbf{v_1}, \mathbf{s} \rangle}{\langle \mathbf{s}, \mathbf{s} \rangle}\mathbf{s} + \alpha_2\frac{\langle \mathbf{v_2}, \mathbf{s} \rangle}{\langle \mathbf{s}, \mathbf{s} \rangle}\mathbf{s} = \\
&= \alpha_1 A\mathbf{v}_1 + \alpha_2 A\mathbf{v}_2 .
\end{aligned}$$

Zato je A res linearna preslikava. Poiščimo matriko za A glede na standardno bazo $\mathscr{S}$ v $\mathbb{R}^3$. Pri tem si bomo za vajo pomagali s tem, da najprej poiščemo bazo $\mathscr{B}$, za katero zlahka najdemo matriko za A. Vektorja

$$\mathbf{n}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

sta normalna vektorja ravnin, katerih presek je premica p in $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ je možen smerni vektor za p. Za $\mathbf{s}$ raje vzamemo $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Ker $\mathbf{s}$ leži na obeh ravninah, je $\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{s} \rangle = 0$ in $\langle \mathbf{n}_2, \mathbf{s} \rangle = 0$. Zato je $A\mathbf{n}_1 = A\mathbf{n}_2 = \mathbf{0}$ in $A\mathbf{s} = \mathbf{s}$. Matrika za A v bazi $\mathscr{B} = \{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{s}\}$ je

$$A_1 = A_{\mathscr{B}\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{VII.5}$$

Prehodna matrika med bazo $\mathscr{B}$ in bazo $\mathscr{S}$ je

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poiščemo inverz (npr. s pomočjo prirejenke)

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Potem je

$$A_2 = A_{\mathscr{S}\mathscr{S}} = PA_1P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \qquad \square$$

4 Rang linearne preslikave

Definicija 4.1 Za linearno preslikavo $A : U \to V$ definiramo *rang* A, oznaka $\mathrm{r}(A)$, kot rang matrike, ki pripada A glede na neki bazi $\mathscr{B}$ za U in $\mathscr{C}$ za V. $\diamondsuit$

Trditev 4.2 *Definicija ranga linearne preslikave je dobra, tj., rang je neodvisen od izbire baz $\mathscr{B}$ in $\mathscr{C}$.*

Dokaz Naj bosta $\mathscr{B}_1$ in $\mathscr{B}_2$ bazi za U ter $\mathscr{C}_1$ in $\mathscr{C}_2$ bazi za V. Po izreku 3.1 je

$$A_2 = QA_1P^{-1}.$$

Ker sta P in Q obrnljivi matriki, je rang matrike A_1 enak rangu matrike A_2.■

Zgled 4.3 Poiščimo rang linearne preslikave A iz zgleda 3.2. Iščemo torej rang matrike A_1 iz (VII.5). Ta je očitno enak 1, zato je $\mathrm{r}(A) = 1$. □

Zgled 4.4 Matriko za linearno preslikavo $D : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, $Dp = p'$, smo poiskali v zgledu 2.1 1.). Njen rang je 3, zato je $\mathrm{r}(D) = 3$. □

Zgled 4.5 Rang identične preslikave $I : V \to V$ je enak $\dim V$, rang ničelne preslikave $O : V \to V$, pa je enak 0. □

Trditev 4.6 *Naj bo $A : U \to V$ linearna preslikava in $W = \ker A$ njeno jedro. Bazo $\mathscr{C} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k\}$ za W dopolnimo do baze*

$$\mathscr{B} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_l\}$$

za U. Potem je

$$\{A\mathbf{u}_1, A\mathbf{u}_2, \dots, A\mathbf{u}_l\}$$

baza za $Z = \operatorname{im} A \subseteq V$. Velja torej

$$\dim U = \dim(\ker A) + \dim(\operatorname{im} A).$$

Dokaz Vemo, da slike baznih vektorjev razpenjajo $Z = \operatorname{im} A$. Zato je

$$Z = \mathscr{L}(A\mathbf{w}_1, A\mathbf{w}_2, \dots, A\mathbf{w}_k, A\mathbf{u}_1, A\mathbf{u}_2, \dots, A\mathbf{u}_l) = \mathscr{L}(A\mathbf{u}_1, A\mathbf{u}_2, \dots, A\mathbf{u}_l),$$

saj je $A\mathbf{w}_i = \mathbf{0}$ za vse i. Pokazati moramo še, da so $A\mathbf{u}_1, A\mathbf{u}_2, \dots, A\mathbf{u}_l$ linearno neodvisni. Denimo, da je $\sum_{j=1}^{l} \alpha_j A\mathbf{u}_j = \mathbf{0}$. Potem je $\mathbf{0} = A\left(\sum_{j=1}^{l} \alpha_j \mathbf{u}_j\right)$ in zato je

$$\sum_{j=1}^{l} \alpha_j \mathbf{u}_j \in W = \ker A.$$

Ker je $\mathscr{C}$ baza za W, je $\sum_{j=1}^{l} \alpha_j \mathbf{u}_j = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \mathbf{w}_i$, oziroma

$$\sum_{j=1}^{l} \alpha_j \mathbf{u}_j - \sum_{i=1}^{k} \beta_i \mathbf{w}_i = \mathbf{0}.$$

Ker je $\mathscr{B}$ baza za U, je $\alpha_1 = \cdots = \alpha_l = \beta_1 = \cdots = \beta_k = 0$. Torej so vektorji $A\mathbf{u}_1, A\mathbf{u}_2, \ldots, A\mathbf{u}_l$ linearno neodvisni. Očitno je

$$\dim U = k + l = \dim(\ker A) + \dim(\operatorname{im} A).$$

Izrek 4.7 *Naj bo $A : U \to V$ linearna preslikava. Potem je*

$$\mathrm{r}(A) = \dim(\operatorname{im} A)$$

Dokaz Izberimo bazi $\mathscr{C}$ in $\mathscr{B}$ kot v trditvi 4.6. Potem je

$$\mathscr{D} = \{A\mathbf{u}_, A\mathbf{u}_2, \ldots, A\mathbf{u}_l\}$$

baza za $\operatorname{im} A$. Dopolnimo jo do baze

$$\mathscr{E} = \{A\mathbf{u}_, A\mathbf{u}_2, \ldots, A\mathbf{u}_l, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$$

za V. V bazah $\mathscr{B}$ in $\mathscr{E}$ pripada A matrika

$$A_{\mathscr{B}\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

kjer prvih k stolpcev ničel pripada vektorjem $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k$, ki so baza za $\ker A$, zadnjih l stolpcev pa vektorjem $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_l$, za katere je $A\mathbf{u}_i \in \mathscr{E}$ za vse i. Potem je

$$\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A)_{\mathscr{B}\mathscr{E}} = l = \dim(\operatorname{im} A),$$

saj je $\mathscr{D}$ baza za $\operatorname{im} A$ po trditvi 4.6. ■

Posledica 4.8 *Če je $A : U \to U$ injektivna linearna preslikava, potem je A surjektivna in zato bijektivna.*

Če je $A : U \to U$ surjektivna linearna preslikava, je A tudi injektivna in zato bijektivna.

Dokaz Če je A injektivna, je v prejšnjem izreku $k = 0$. Zato je

$$\dim(\operatorname{im} A) = \dim U.$$

Zato je $U = \operatorname{im} A$ in A je surjektivna.

Če je A surjektivna, je $\operatorname{im} A = U$ in zato je $\operatorname{r}(A) = \dim U$. V oznakah iz dokaza prejšnjega izreka je potem

$$\dim U = \dim(\ker A) + \dim(\operatorname{im} A) = k + \operatorname{r}(A) = k + \dim U\,.$$

Zato je $k = 0$, oziroma $\ker A = 0$, in A je injektivna. ■

5 Podobnost matrik

Naj bosta $\mathscr{B}$ in $\mathscr{C}$ dve bazi za vektorski prostor V. Linearna preslikava

$$A : V \to V$$

ima glede na bazo $\mathscr{B}$ matriko $A_{\mathscr{B}\mathscr{B}}$, glede na bazo $\mathscr{C}$ pa matriko $A_{\mathscr{C}\mathscr{C}}$. Če je P prehodna matrika med bazo $\mathscr{B}$ in bazo $\mathscr{C}$, potem je

$$A_{\mathscr{C}\mathscr{C}} = P A_{\mathscr{B}\mathscr{B}} P^{-1}\,.$$

Definicija 5.1 Če dve matriki A_1 in A_2 predstavljata isto linearno preslikavo $A : V \to V$ glede na dve različni bazi, potem rečemo, da sta matriki A_1 in A_2 *podobni matriki*, oziroma, da je matrika A_1 podobna matriki A_2. ◊

Definicijo podobnosti matrik lahko izrazimo ekvivalentno:

Trditev 5.2 *Matrika A_1 je podobna matriki A_2 natanko tedaj, ko obstaja taka obrnljiva matrika P, da je*

$$A_2 = P A_1 P^{-1}\,.$$

Izrek 5.3 *Podobnost matrik je ekvivalenčna relacija.*

Dokaz Označimo $A_1 \sim A_2$, če je matrika A_1 podobna matriki A_2. Ker je $A_1 = I \cdot A_1 \cdot I^{-1}$, je $A_1 \sim A_1$. Relacija $\sim$ je refleksivna.

Naj bo $A_1 \sim A_2$. Potem je $A_2 = P A_1 P^{-1}$ za neko obrnljivo matriko P. Od tod dobimo, da je

$$A_1 = P^{-1} A_2 P = P^{-1} A_2 \left(P^{-1}\right)^{-1}$$

in zato je $A_2 \sim A_1$. Relacija $\sim$ je simetrična.

Naj bo $A_1 \sim A_2$ in $A_2 \sim A_3$. Zato je

$$A_2 = PA_1P^{-1} \quad \text{in} \quad A_3 = QA_2Q^{-1}$$

za neki obrnljivi matriki P in Q. Potem sledi

$$A_3 = QA_2Q^{-1} = QPA_1P^{-1}Q^{-1} = (QP)A_1(QP)^{-1}\,.$$

Ker je produkt obrnljivih matrik obrnljiva matrika, je $A_1 \sim A_3$. Torej je relacija $\sim$ tudi tranzitivna. ■