Dodatek C

Ekvivalenčna relacija

Naj bo M neprazna množica in R podmnožica v množici vseh urejenih parov $M \times M$. Za urejen par elementov $(x, y) \in M \times M$ rečemo, da sta *v relaciji* R, če je $(x, y) \in R$. Če velja $(x, y) \notin R$, potem rečemo, da x in y nista v relaciji R. Dejstvo, da sta x in y v relaciji R, označimo z $x\,R\,y$. Če x in y nista v relaciji R, to označimo z $x \not R\, y$. Ko govorimo o relaciji R, velikokrat "pozabimo", da je $R \subseteq M \times M$, pač pa govorimo o R samo kot o odnosu med pari elementov $x, y \in M$. Tedaj relacija R za vsak par elementov $x, y \in M$ pove, ali $x\,R\,y$ velja ali pa x in y nista v relaciji R, torej je $x \not R\, y$.

Zgled C.1 **1.)** Na množici realnih števil $\mathbb{R}$ imamo relacijo manjši $<$. Npr. $2 < 3$ ali $0 < \pi$, medtem ko 2 in -2 nista v relaciji $<$: $2 \not< -2$.

2.) Na $\mathbb{R}$ imamo tudi relacijo manjši ali enak $\leq$. Tako je npr. $5 \leq 5$ in $4 \leq 5$, medtem ko 2 in 1 nista v relaciji: $2 \nleq 1$.

3.) Naj bo V vektorski prostor (dimenzije vsaj 2). Na množici $\mathscr{M}$ vseh vektorskih podprostorov na $\mathscr{M}$ imamo relacijo vsebovan $\subseteq$.

4.) Na množici naravnih števil $\mathbb{N}$ imamo relacijo "deli" $|$. Npr. $2 \mid 4$ in $5 \mid 100$, medtem ko $2 \nmid 5$. □

Definicija C.2 Naj bo M neprazna množica in R relacija na M. Potem je relacija R:

a) *refleksivna*, če je $x\,R\,x$ za vse $x \in M$,

b) *simetrična*, če $x\,R\,y$ velja natanko tedaj kot $y\,R\,x$,

c) *tranzitivna*, če iz veljavnosti $x\,R\,y$ in $y\,R\,z$ sledi $x\,R\,z$,

d) *ekvivalenčna*, če je refleksivna, simetrična in tranzitivna. $\Diamond$

Zgled C.3 **1**.) Relacija $\leq$ na $\mathbb{R}$ je refleksivna, saj je $x \leq x$ za vse $x \in \mathbb{R}$. Ta relacija ni simetrična, saj je npr. $1 \leq 2$ in $2 \not\leq 1$. Relacija je tranzitivna, ker iz $x \leq y$ in $y \leq z$ sledi $x \leq z$.

2.) Naj bo $\mathscr{M}$ podmnožica vseh vektorskih podprostorov v $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, in $\subseteq$ relacija na $\mathscr{M}$. Potem je $\subseteq$ refleksivna in tranzitivna. Relacija $\subseteq$ ni simetrična, saj je npr. $\mathscr{L}(\mathbf{e}_1) \subseteq \mathscr{L}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ in $\mathscr{L}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \nsubseteq \mathscr{L}(\mathbf{e}_1)$. Tu je $\mathscr{S} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ standardna baza za $\mathbb{R}^n$.

3.) Na množici $\mathscr{M}$ vektorskih podprostorov v $\mathbb{R}^n$ vpeljimo še eno relacijo, ki jo označimo z $\sim$. Rečemo, da sta U in W v relaciji $\sim$, če obstaja taka obrnljiva linearna preslikava $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, da je $AU = W$.

Poglejmo, katere lastnosti ima relacija $\sim$. Je refleksivna, saj za identično preslikavo $I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ velja $IU = U$ za vse $U \in \mathscr{M}$. Zato je $U \sim U$ za vse $U \in \mathscr{M}$.

Naj bo $U \sim W$. Potem je $AU = W$ za neko obrnljivo linearno preslikavo $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Ker je A^{-1} tudi obrnljiva in zanjo velja $A^{-1}W = U$, je $W \sim U$. Zato je $\sim$ simetrična relacija.

Predpostavimo, da je $U \sim V$ in $V \sim W$. Potem je $AU = V$ in $BV = W$ za neki obrnljivi linearni preslikavi $A, B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Produkt BA je obrnljiva preslikava in zanjo velja $BAU = BV = W$. Zato je $U \sim W$ in $\sim$ je tranzitivna relacija.

Ker je $\sim$ refleksivna, simetrična in tranzitivna, je $\sim$ ekvivalenčna relacija. $\Box$

Če je R ekvivalenčna relacija na M, potem za vsak $x \in M$ označimo

$$[x] = \{y \in M \ ; \ x \, R \, y\}.$$

Množica $[x] \neq \emptyset$, saj je gotovo $x \in [x]$. Množico $[x]$ imenujemo *ekvivalenčni razred* elementa x (glede na ekvivalenčno relacijo R).

Izrek C.4 *Naj bo R ekvivalenčna relacija na M. Če je $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ za neka $x, y \in M$, potem je $[x] = [y]$.*

Dokaz Denimo, da je $z \in [x] \cap [y]$. Vzemimo $a \in [x]$. Potem je $x \, R \, z$, $y \, R \, z$ in $x \, R \, a$. Zaradi simetričnosti velja tudi $z \, R \, x$. Z uporabo tranzitivnosti iz $y \, R \, z$ in $z \, R \, x$ dobimo $y \, R \, x$. S ponovno uporabo tranzitivnosti iz $y \, R \, x$ ter $x \, R \, a$ dobimo $y \, R \, a$. Torej je $a \in [y]$ in $[x] \subseteq [y]$. Če v zgornjem razmisleku zamenjamo vlogi x in y, dobimo še obratno vsebovanost $[y] \subseteq [x]$. Zato je res $[x] = [y]$. $\blacksquare$

Izrek C.5 *Če je R ekvivalenčna relacija na M, potem je M disjunktna unija vseh različnih ekvivalenčnih razredov za R. Velja torej*

$$M = \bigcup_{i\in I} [x_1] \quad , \quad [x_i] \cap [x_j] = \emptyset \text{ za } i \neq j,$$

za neko podmnožico $\{x_i \ ; i \in I\} \subseteq M$.

Obratno, če je M disjunktna unija nekih svojih nepraznih podmnožic, denimo

$$M = \bigcup_{i\in I} M_i \quad , \quad M_i \cap M_j = \emptyset \text{ za } i \neq j,$$

potem je relacija R definirana z

$$x\,R\,y \iff \text{obstaja tak indeks } i \text{, da je } x, y \in M_i, \tag{C.1}$$

ekvivalenčna relacija.

Dokaz Prvi del izreka sledi iz izreka C.4. Preverimo še, da je relacija R definirana v (C.1), ekvivalenčna.

Očitno je refleksivna, saj za vsak x iz M obstaja tak $i \in I$, da je $x \in M_i$. Potem je $x, x \in M_i$ in zato je $x\,R\,x$.

Predpostavimo, da je $x\,R\,y$. Potem je $x, y \in M_i$ za nek $i \in I$. Vendar je potem tudi $y\,R\,x$, saj je $y, x \in M_i$ za isti i.

Denimo, da je $x\,R\,y$ in $y\,R\,z$. Potem je $x, y \in M_i$ za nek i in $y, z \in M_j$ za nek j. Ker je $y \in M_i \cap M_j$, mora biti $M_i = M_j$. Potem je $x, z \in M_i$ in zato $x\,R\,z$. Relacija R je tudi tranzitivna in zato ekvivalenčna. ■

Zgled C.6 Relacija $\sim$ iz zgleda C.3 3.) je ekvivalenčna. Kaj so njeni ekvivalenčni razredi?
Če je $AU = W$ za kaka podprostora $U, W \subseteq \mathbb{R}^n$ in kako obrnljivo preslikavo $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, potem je gotovo $\dim U = \dim W$.

Predpostavimo, da sta U in W podprostora enake dimenzije v $\mathbb{R}^n$. Naj bo $\mathscr{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ baza za U in $\mathscr{C} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k\}$ baza za W. Bazi dopolnimo do baz $\mathscr{B}_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ in $\mathscr{C}_1 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ za $\mathbb{R}^n$. Naj bo $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linearna preslikava podana s predpisom $A\mathbf{u}_i = \mathbf{w}_i$ za $i = 1, 2, \ldots, n$. Potem je A surjektivna in zato bijektivna. Za A velja $AU = W$. Torej je $U \sim W$. Ekvivalenčni razredi podprostora U so tako ravno vsi vektorski podprostori z isto dimenzijo kot U. Iz povedanega sledi, da je

$$\mathscr{M} = \bigcup_{k=0}^{n} [\mathscr{L}(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)] ,$$

kjer je $\mathscr{S} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ standardna baza za $\mathbb{R}^n$. Pri tem je $\mathscr{L}(\emptyset) = 0$. □

Zgled C.7 Naj bo $M = \mathbb{R}^{m\times n}$. Na M je dana relacija $\sim$ s predpisom

$$A \sim B \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{c}\text{obstajata taki obrnljivi matriki } P \in \mathbb{R}^{m\times m} \text{ in } Q \in \mathbb{R}^{n\times n},\\ \text{da je } B = PAQ.\end{array}$$

Pokažimo, da je $\sim$ ekvivalenčna in poiščimo njene ekvivalenčne razrede.

Za vsak $A \in M$ je $A = I_m A I_n$, zato je $A \sim A$.

Če je $A \sim B$, je $B = PAQ$ za kaki obrnljivi matriki P in Q. Potem je $A = P^{-1}BQ^{-1}$. Torej je tudi $B \sim A$.

Denimo, da velja $A \sim B$ in $B \sim C$. Potem je $B = P_1AQ_1$ in $C = P_2BQ_2$ za kake obrnljive matrike P_1, P_2, Q_1 in Q_2. Tedaj je

$$C = P_2BQ_2 = P_2P_1AQ_1Q_2\,.$$

Ker sta P_2P_1 in Q_1Q_2 obrnljivi matriki, je $A \sim C$. Torej je $\sim$ ekvivalenčna relacija.

Kaj so ekvivalenčni razredi? Če je $A \sim B$, je $B = PAQ$ za kaki obrnljivi matriki P in Q. Ker množenje z obrnljivo matriko ne spremeni ranga matrike, je $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B)$. Denimo, da sta A in B matriki z istim rangom r. Enako kot v dokazu izreka VII4.7 pokažemo, da v $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ obstajata taki bazi $\mathscr{B}_1$ in $\mathscr{C}_1$, da ima A v njih matriko

$$A_{\mathscr{B}_1\mathscr{C}_1} = C_r = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

kjer je $I \in \mathbb{R}^{r\times r}$. Torej je $C_r = P_1AQ_1$, kjer sta P_1 in Q_1 prehodni matriki. Ker je $\mathrm{r}(B)$ tudi enak r, enako pokažemo, da je

$$C_r = P_2BQ_2$$

za neki prehodni matriki P_2 in Q_2. Potem je

$$B = P_2^{-1}C_rQ_2^{-1} = P_2^{-1}P_1AQ_1Q_2^{-1}$$

in zato velja $B \sim A$.

Iz povedanega sledi, da je ekvivalenčni razred glede narelacijo $\sim$ enak podmnožici vseh matrik z istim rangom. Torej je $M = \bigcup_{i=0}^{\min\{m,n\}} M_i$, kjer je

$$M_i = \{A \in \mathbb{R}^{m\times n} \;;\; \mathrm{r}(A) = i\}\,. \qquad \square$$

Zgled C.8 Na $M = \mathbb{R}^{m\times n}$ vpeljemo drugo relacijo $\simeq$ s predpisom

$$A \simeq B \quad \Longleftrightarrow \quad \text{obstaja taka obrnljiva matrika } P \in \mathbb{R}^{m\times m}\text{, da je } B = PA.$$

Dokaz, da je $\simeq$ ekvivalenčna relacija, je zelo podoben dokazu, da je relacija $\sim$ v prejšnjem zgledu ekvivalenčna. Zato ta dokaz prepuščamo bralcu za vajo.

Kaj so ekvivalenčni razredi? Iz II. in III. poglavja vemo, da imata dve matriki A in B, za kateri je $B = PA$ in je P obrnljiva, isto vrstično kanonično formo. Obratno, naj bosta A in B taki matriki, ki imata isto vrstično kanonično formo, ki jo označimo s C. Ker lahko vrstične elementarne transformacije dosežemo z množenjem z leve z obrnljivimi matrikami, je

$$A = P_1 C$$

za kako obrnljivo matriko P_1. Podobno je $B = P_2 C$ za kako obrnljivo matriko P_2. Potem je

$$B = P_2 C = P_2 P_1^{-1} A\,.$$

Zato je $A \simeq B$. Ekvivalenčni razred v M glede na relacijo $\simeq$ je ravno množica vseh matrik z isto vrstično kanonično formo. Ker je različnih vrstičnih kanoničnih form za matriko iz $\mathbb{R}^{m\times n}$, $n \geq 2$ neskončno mnogo, je M disjunktna unija neskončno mnogo različnih ekvivalenčnih razredov. $\square$