Poglavje X

Sebiadjungirane, ortogonalne in normalne preslikave

Na vektorskih prostorih s skalarnim produktom imamo nekatere posebne vrste linearnih preslikav, ki imajo posebej lepe lastnosti. V tem poglavju si bomo ogledali nekaj tipov takih preslikav (in njihovih matrik) in njihove lastnosti. Najprej pa bomo vpeljali pojem adjungiranja linearnih preslikav in si ogledali, kako se to odraža na pripadajočih matrikah.

1 Adjungirana preslikava

Imejmo dva vektorska prostora (nad $\mathbb{C}$) s skalarnim produktom $(U, \langle\, \cdot\,,\, \cdot\,\rangle_1)$ in $(V, \langle\, \cdot\,,\, \cdot\,\rangle_2)$. V tem razdelku bomo z indeksom posebej poudarili, za kateri skalarni produkt gre. Kasneje bomo indekse izpuščali, saj bo že iz preostalega teksta jasno, iz katerega vektorskega prostora so vektorji, ki jih skalarno množimo.

Dana je še linearna preslikava $A : U \to V$. Izberimo vektor $\mathbf{v} \in V$. Potem je preslikava $\varphi : U \to \mathbb{C}$, $\varphi(\mathbf{u}) = \langle A\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_2$ linearen funkcional. Velja namreč

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2) &= \langle A(\alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2), \mathbf{v}\rangle_2 = \langle \alpha_1 A\mathbf{u}_1 + \alpha_2 A\mathbf{u}_2, \mathbf{v}\rangle_2 = \\ &= \alpha_1\langle A\mathbf{u}_1, \mathbf{v}\rangle_2 + \alpha_2\langle A\mathbf{u}_2, \mathbf{v}\rangle_2 = \alpha_1\varphi(\mathbf{u}_1) + \alpha_2\varphi(\mathbf{u}_2)\,.\end{aligned}$$

Po Rieszovem izreku o funkcionalih 3.7 iz prejšnjega poglavja obstaja enolično določen vektor iz U, ki ga označimo z $A^*\mathbf{v}$, za katerega velja

$$\varphi(\mathbf{u}) = \langle A\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_2 = \langle \mathbf{u}, A^*\mathbf{v}\rangle_1$$

za vse $\mathbf{u} \in U$. Pri tem je A^* preslikava iz V v U.

Izrek 1.1 *Preslikava $A^*: V \to U$ je linearna.*

Dokaz Posebej bomo preverili aditivnost in posebej homogenost A^*.

Naj bosta $\mathbf{v}_1$ in $\mathbf{v}_2$ iz V. Potem velja

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u}, A^*\mathbf{v}_1\rangle_1 = \langle A\mathbf{u}, \mathbf{v}_1\rangle_2,\\ \langle \mathbf{u}, A^*\mathbf{v}_2\rangle_1 = \langle A\mathbf{u}, \mathbf{v}_2\rangle_2\end{aligned}$$

in

$$\langle \mathbf{u}, A^*(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)\rangle_1 = \langle A\mathbf{u}, \mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2\rangle_2$$

za vse $\mathbf{u} \in U$. Od tod izračunamo

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u}, A^*(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)\rangle_1 &= \langle A\mathbf{u}, \mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2\rangle_2 = \langle A\mathbf{u}, \mathbf{v}_1\rangle_2 + \langle A\mathbf{u}, \mathbf{v}_2\rangle_2 = \\ &= \langle \mathbf{u}, A^*\mathbf{v}_1\rangle_1 + \langle \mathbf{u}, A^*\mathbf{v}_2\rangle_1 = \langle \mathbf{u}, A^*\mathbf{v}_1 + A^*\mathbf{v}_2\rangle_1 .\end{aligned}$$

Iz trditve 3.6 prejšnjega poglavja nato sledi

$$A^*(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2) = A^*\mathbf{v}_1 + A^*\mathbf{v}_2.$$

Preverimo še homogenost. Naj bo $\alpha \in \mathbb{C}$ in $\mathbf{v} \in V$. Potem je

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u}, A^*\mathbf{v}\rangle_1 &= \langle A\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_2 \quad \text{in}\\ \langle \mathbf{u}, A^*(\alpha\mathbf{v})\rangle_1 &= \langle A\mathbf{u}, \alpha\mathbf{v}\rangle_2\end{aligned}$$

za vse $\mathbf{u} \in U$. Zato velja

$$\langle \mathbf{u}, A^*(\alpha\mathbf{v})\rangle_1 = \langle A\mathbf{u}, \alpha\mathbf{v}\rangle_2 = \overline{\alpha}\langle A\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_2 = \overline{\alpha}\langle \mathbf{u}, A^*\mathbf{v}\rangle_1 = \langle \mathbf{u}, \alpha A^*\mathbf{v}\rangle_1$$

za vse $\mathbf{u} \in U$. Po trditvi 3.6 prejšnjega poglavja sledi $A^*(\alpha\mathbf{v}) = \alpha A^*\mathbf{v}$. ■

Definicija 1.2 Če je $A: U \to V$ linearna preslikava, potem linearno preslikavo $A^*: V \to U$ imenujemo *adjungirana preslikava* preslikave A. ◊

Iz definicije sledi enakost

$$\langle A\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_2 = \langle \mathbf{u}, A^*\mathbf{v}\rangle_1 \tag{X.1}$$

za vse $\mathbf{u} \in U$ in vse $\mathbf{v} \in V$.

Preden navedemo kak zgled adjungirane preslikave, si oglejmo, kako sta povezani matriki za A in za A^*.

Izberimo ortonormirano bazo $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ za U in ortonormirano bazo $\mathscr{C} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_m\}$ za V. Potem je

$$A\mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^{m} \langle A\mathbf{e}_j, \mathbf{f}_k \rangle_2 \, \mathbf{f}_k \quad j = 1, 2, \ldots, n\,,$$

zato je matrika za A v bazah $\mathscr{B}$ in $\mathscr{C}$ enaka

$$A_{\mathscr{B}\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} \langle A\mathbf{e}_1, \mathbf{f}_1\rangle_2 & \langle A\mathbf{e}_2, \mathbf{f}_1\rangle_2 & \ldots & \langle A\mathbf{e}_n, \mathbf{f}_1\rangle_2 \\ \langle A\mathbf{e}_1, \mathbf{f}_2\rangle_2 & \langle A\mathbf{e}_2, \mathbf{f}_2\rangle_2 & \ldots & \langle A\mathbf{e}_n, \mathbf{f}_2\rangle_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle A\mathbf{e}_1, \mathbf{f}_m\rangle_2 & \langle A\mathbf{e}_2, \mathbf{f}_m\rangle_2 & \ldots & \langle A\mathbf{e}_n, \mathbf{f}_m\rangle_2 \end{bmatrix}.$$

Podobno poiščemo še matriko za A^*. Ker je

$$A^*\mathbf{f}_k = \sum_{j=1}^{n} \langle A^*\mathbf{f}_k, \mathbf{e}_j \rangle_1 \, \mathbf{e}_j \quad k = 1, 2, \ldots, m\,,$$

je

$$(A^*)_{\mathscr{C}\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} \langle A^*\mathbf{f}_1, \mathbf{e}_1\rangle_1 & \langle A^*\mathbf{f}_2, \mathbf{e}_1\rangle_1 & \ldots & \langle A^*\mathbf{f}_m, \mathbf{e}_1\rangle_1 \\ \langle A^*\mathbf{f}_1, \mathbf{e}_2\rangle_1 & \langle A^*\mathbf{f}_2, \mathbf{e}_2\rangle_1 & \ldots & \langle A^*\mathbf{f}_m, \mathbf{e}_2\rangle_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle A^*\mathbf{f}_1, \mathbf{e}_n\rangle_1 & \langle A^*\mathbf{f}_2, \mathbf{e}_n\rangle_1 & \ldots & \langle A^*\mathbf{f}_m, \mathbf{e}_n\rangle_1 \end{bmatrix}.$$

Ker je $\langle A\mathbf{e}_j, \mathbf{f}_k\rangle_2 = \langle \mathbf{e}_j, A^*\mathbf{f}_k\rangle_1 = \overline{\langle A^*\mathbf{f}_k, \mathbf{e}_j\rangle_1}$, vidimo, da matriko $(A^*)_{\mathscr{C}\mathscr{B}}$ dobimo iz matrike $A_{\mathscr{B}\mathscr{C}}$ tako, da $A_{\mathscr{B}\mathscr{C}}$ transponiramo in njene elemente konjugiramo. Tako smo pokazali naslednji izrek:

Izrek 1.3 *V ortonormiranih bazah dobimo matriko za A^* tako, da matriko za A transponiramo in vse elemente v matriki konjugiramo.*

Opomba 1.4 Če je $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ matrika, potem z A^* označimo matriko v $\mathbb{C}^{n\times m}$, ki jo dobimo tako, da A transponiramo in vse elemente v A konjugiramo. $\Diamond$

Zgled 1.5 Naj bo $A = \begin{bmatrix} \mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \\ 2 & 3+2\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} \end{bmatrix}$. Potem je

$$A^* = \begin{bmatrix} -\mathrm{i} & 2 & 0 \\ 1+\mathrm{i} & 3-2\mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{bmatrix}. \qquad \Box$$

2 Lastnosti adjungiranja linearnih preslikav in matrik

Preslikavo, ki linearni preslikavi A, oziroma matriki A priredi adjungirano preslikavo A^*, oziroma matriko A^*), imenujemo *adjungiranje*.

Lastnosti adjungiranja izpeljemo iz lastnosti transponiranja matrik. Če je $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, potem je $A^* = A^\top$, če pa je $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, je $A^* = \overline{A^\top}$, kjer smo z $\overline{A}$ označili matriko, ki jo dobimo iz A tako, da konjugiramo vse elemente.

Za adjungiranje veljajo naslednje lastnosti:

1.) $(A + B)^* = A^* + B^*$,

2.) $(\alpha A) = \overline{\alpha} A^*$,

3.) $(AB)^* = B^* A^*$,

4.) $0^* = 0$, $I^* = I$,

5.) $(A^*)^* = A$,

6.) Če je A obrnljiva, je tudi A^* obrnljiva in velja $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Za zgled preverimo samo zadnjo lastnost. Ostale naj preveri bralec sam za vajo.

Če je A obrnljiva, je $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Potem iz lastnosti 3.) in 4.) sledi

$$\begin{aligned} (A^{-1})^* A^* = (AA^{-1})^* &= I^* = I \quad \text{in} \\ A^*(A^{-1})^* = (A^{-1}A)^* &= I^* = I\,. \end{aligned}$$

Zato je A^* obrnljiva in velja $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$. ■

Enako kot v osmem poglavju bomo tudi v tem poglavju trditve in izreke podali za matrike, enaki izreki veljajo tudi za linearne preslikave istega tipa. Nekatere od teh bomo na kratko povzeli na koncu razdelka.

Trditev 2.1 *Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ali $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ dana matrika in A^* njena adjungirana matrika. Potem je*

$$\begin{aligned} \ker A^* &= (\operatorname{im} A)^\perp\,, \\ (\ker A^*)^\perp &= \operatorname{im} A\,, \\ \operatorname{im} A^* &= (\ker A)^\perp \quad \textit{in} \\ (\operatorname{im} A^*)^\perp &= \ker A\,. \end{aligned}$$

Dokaz Dovolj je pokazati enakost $\ker A^* = (\operatorname{im} A)^\perp$. Ostale enakosti potem sledijo iz dejstev, da za vektorski podprostor velja $(W^\perp)^\perp = W$ in da je $(A^*)^* = A$.

Naj bo $\mathbf{v} \in \ker A^*$. Potem je

$$0 = \langle \mathbf{u}, A^*\mathbf{v}\rangle_1 = \langle A\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_2$$

za vse $\mathbf{u} \in U$, torej tudi za vse $A\mathbf{u} \in \operatorname{im} A$. Zato je $\ker A^* \subseteq (\operatorname{im} A)^\perp$.

Izberimo sedaj $\mathbf{v} \in (\operatorname{im} A)^\perp$. Torej je $\langle A\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_2 = 0$ za vse $\mathbf{u} \in U$ in

$$0 = \langle A\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_2 = \langle \mathbf{u}, A^*\mathbf{v}\rangle_1$$

za vse $\mathbf{u} \in U$. Potem mora biti $A^*\mathbf{v} = \mathbf{0}$ in $\mathbf{v} \in \ker A^*$. Tako smo pokazali še obratno inkluzijo $(\operatorname{im} A)^\perp \subseteq \ker A^*$. Torej je $\ker A^* = (\operatorname{im} A)^\perp$.

Preverimo še preostale enakosti. Ker za poljuben vektorski podprostor W velja $(W^\perp)^\perp = W$, je $(\ker A^*)^\perp = \left((\operatorname{im} A)^\perp\right)^\perp = \operatorname{im} A$.

Če v zvezah $\ker A^* = (\operatorname{im} A)^\perp$ in $(\ker A^*)^\perp = \operatorname{im} A$ zamenjamo A z A^*, dobimo

$$\begin{aligned} \ker A = {} & \ker (A^*)^* && = (\operatorname{im} A^*)^\perp \quad \text{in} \\ (\ker A)^\perp = {} & (\ker (A^*)^*)^\perp && = \operatorname{im} A^* \,. \end{aligned}$$

■

Posledica 2.2 *Velja*

$$U = \operatorname{im} A^* \oplus \ker A \qquad \textit{in} \qquad V = \operatorname{im} A \oplus \ker A^* \,.$$

Obe direktni vsoti sta ortogonalni.

Dokaz Za vektorski podprostor $\ker A \subseteq U$ velja

$$U = (\ker A) \oplus (\ker A)^\perp = \ker A \oplus \operatorname{im} A^* \,.$$

Podobno za vektorski podprostor $\ker A^* \subseteq V$ velja

$$V = \ker A^* \oplus (\ker A^*)^\perp = \ker A^* \oplus \operatorname{im} A \,.$$

■

Zgled 2.3 Poiščimo ortonormirano bazo za $\ker A^*$, če je $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Opazimo, da je rang matrike A enak 1, zato je $\dim(\operatorname{im} A) = 1$. Ker je $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$, je $A^* \in \mathbb{R}^{2\times 3}$. Tudi rang A^* je enak 1, zato je $\dim(\ker A^*) = 2$. Velja

$$\ker A^* = (\operatorname{im} A)^\perp = \left(\mathscr{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right)\right)^\perp .$$

Izbrana vektorja $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ in $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$ sta oba pravokotna na bazni vektor slike A. Da dobimo ortogonalno bazo, naredimo Gramm-Schmidtovo ortogonalizacijo:

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},$$
$$\mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix} - \frac{2}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

Ortonormirano bazo za $\ker A^*$ tvorita vektorja

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \qquad \text{in} \qquad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

□

Trditev 2.4 *Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ali $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ dana matrika. Potem je α lastna vrednost za A natanko tedaj, ko je $\overline{\alpha}$ lastna vrednost za A^*.*

Dokaz Kompleksno število α je lastna vrednost za A natanko tedaj, ko je $\ker(A - \alpha I) \neq \mathbf{0}$. Po trditvi 2.1 in lastnostih konjugiranja je

$$\ker(A - \alpha I) = (\operatorname{im}(A - \alpha I)^*)^\perp = (\operatorname{im}(A^* - \overline{\alpha} I))^\perp .$$

Tako je $\alpha \in \sigma(A)$ natanko tedaj, ko $\operatorname{im}(A^* - \overline{\alpha} I) \neq U$. To pa je ekvivalentno temu, da je $\ker(A^* - \overline{\alpha} I) \neq \mathbf{0}$. Torej je $\alpha \in \sigma(A)$ natanko tedaj, ko je $\overline{\alpha} \in \sigma(A^*)$. ■

Zgled 2.5 Poiščimo lastne vrednosti za matriki

$$A = \begin{bmatrix}1+\mathrm{i} & 1-\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 1\end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix}1-\mathrm{i} & -\mathrm{i}\\ 1+\mathrm{i} & 1\end{bmatrix}.$$

Najprej izračunamo karakteristični polinom za A: $p_A(\lambda) = \lambda^2 - (2+\mathrm{i})\lambda$. Lastni vrednosti za A sta 0 in $2+\mathrm{i}$. Ker je $B = A^*$, sta lastni vrednosti za B enaki 0 in $2-\mathrm{i}$. □

3 Sebiadjungirane preslikave, simetrične in hermitske matrike

Dan je vektorski prostor U nad obsegom $\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$ s skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definicija 3.1 Linearna preslikava $A : U \to U$ je *sebiadjungirana*, če velja $A = A^*$.

Če je $U = \mathbb{R}^n$ realen vektorski prostor z običajnim skalarnim produktom, potem je A matrika za sebiadjungirano linearno preslikavo $A : U \to U$ v standardni bazi natanko tedaj, ko je A *simetrična matrika*, torej ko je $A^\top = A$.

Če je $U = \mathbb{C}^n$ vektorski prostor nad $\mathbb{C}$ z običajnim skalarnim produktom, potem je A matrika za sebiadjungirano preslikavo $A : U \to U$ v standardni bazi natanko tedaj, ko je $A = A^* = \overline{A}^\top$. Če za matriko velja $A = A^*$ rečemo, da je A *hermitska matrika*. $\diamondsuit$

Izrek 3.2 *Vse lastne vrednosti simetrične ali hermitske matrike so realne.*

Dokaz Naj bo α lastna vrednost hermitske matrike $A \in \mathbb{C}^n$ in $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ pripadajoči lastni vektor. Potem velja

$$\langle A\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle \alpha\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$$

in

$$\langle A\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, A^*\mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, A\mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \alpha\mathbf{u} \rangle = \overline{\alpha} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle .$$

Zato je $\alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \overline{\alpha} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$. Ker je $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \neq 0$, mora biti $\alpha = \overline{\alpha}$. Slednje velja natanko tedaj, ko je $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dokaz za simetrično matriko je enak. ■

Trditev 3.3 *Če sta* $\mathbf{u}$ *in* $\mathbf{v}$ *lastna vektorja pri dveh različnih lastnih vrednostih simetrične ali hermitske matrike, potem sta* $\mathbf{u}$ *in* $\mathbf{v}$ *ortogonalna.*

Dokaz Denimo, da je $A = A^*$, $A\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}$, $A\mathbf{v} = \beta\mathbf{v}$ in $\alpha \neq \beta$. Potem je $\langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \alpha\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ in $\langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, A\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \beta\mathbf{v} \rangle = \beta \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$. Ker je $\alpha \neq \beta$, mora biti $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$. ■

Izrek 3.4 *Simetrične in hermitske matrike se da diagonalizirati.*

Dokaz Naj bo $A = A^*$ hermitska matrika in naj bo α lastna vrednost za A. Iz posledice 2.2 sledi, da je

$$\mathbb{C}^n = \ker(A - \alpha I) \oplus \operatorname{im}(A - \alpha I) . \tag{X.2}$$

Glede na ta razcep pripada A matrika oblike

$$\begin{bmatrix} \alpha I & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}, \tag{X.3}$$

saj sta tako $\ker(A-\alpha I)$ kot $\operatorname{im}(A-\alpha I)$ invariantna podprostora za A. Še več, ker je direktna vsota (X.2) ortogonalna, ima A obliko (X.3) glede na neko ortonormirano bazo. Ker je $A = A^*$, je tudi $A_1 = A_1^*$. Ali je lahko α lastna vrednost za A_1? Denimo, da je $\mathbf{w} \in \operatorname{im}(A-\alpha I)$ tak vektor, da je $A\mathbf{w} = \alpha\mathbf{w}$. Potem je $\mathbf{w} \in \ker(A-\alpha I)$ in $\mathbf{w} \in (\operatorname{im}(A-\alpha I) \cap \ker(A-\alpha I)) = \mathbf{0}$. Zato mora biti $\mathbf{w} = \mathbf{0}$. Iz povedanega sledi, da je $\mathrm{g}(\alpha) = \mathrm{a}(\alpha)$. Ker je bila α poljubna lastna vrednost, enakost $\mathrm{g}(\alpha) = \mathrm{a}(\alpha)$ velja za vse $\alpha \in \sigma(A)$. Torej se A da diagonalizirati.

Dokaz za simetrične matrike je enak. ■

Izrek 3.5 (**o spektralnem razcepu za simetrične in hermitske matrike**) *Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična matrika in $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ vse njene različne lastne vrednosti. Potem je $\alpha_j \in \mathbb{R}$ za vse j in*

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{j-1}^{k} \ker(A-\alpha_j I)$$

ortogonalna direktna vsota. V $\mathbb{R}^n$ obstaja ortonormirana baza, v kateri A pripada diagonalna matrika.

Če je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitska matrika in $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ vse njene različne lastne vrednosti, je potem $\alpha_j \in \mathbb{R}$ za vse j in

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{j-1}^{k} \ker(A-\alpha_j I)$$

ortogonalna direktna vsota. V $\mathbb{C}^n$ obstaja ortonormirana baza, v kateri A pripada diagonalna matrika.

Dokaz Izrek bomo dokazali za hermitske matrike. Za simetrčne matrike je enak.

Iz izreka 3.4 vemo, da se A da diagonalizirati. Posledica 2.2 pove, da je

$$\mathbb{C}^n = \ker(A-\alpha_1 I) \oplus \operatorname{im}(A-\alpha_1 I)$$

ortogonalna direktna vsota. Ker so po trditvi 3.3 lastni vektorji pri različnih lastnih vrednostih ortogonalni, je $\ker(A-\alpha_j I) \subseteq \operatorname{im}(A-\alpha_1 I)$ za vse $j =$

$2, 3, \ldots, k$. Postopek nadaljujemo za zožitev $A_1 = A\mid_{\mathrm{im}(A-\alpha_1 I)}$ in dobimo $U = \bigoplus_{j=1}^{k} \ker(A-\alpha_j I)$, kjer je $\bigoplus$ ortogonalna direktna vsota. Vemo, da v vsakem podprostoru lahko s pomočjo Gramm-Schmidtovega algoritma poiščemo ortonormirano bazo. Ker so lastni podprostori $\ker(A-\alpha_j I)$ med seboj ortogonalni, nam unija ortonormiranih baz za $\ker(A-\alpha_j I)$, $j = 1, 2, \ldots, k$, da ortonormirano bazo iz lastnih vektorjev za $\mathbb{C}^n$. ■

Zgled 3.6 Poiščimo ortonormirano bazo iz lastnih vektorjev za matriko

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Karakteristični polinom za A je

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 4 \\ -2 & 6-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-7)^2(\lambda+2)\,.$$

Lastni vrednosti sta $\alpha_1 = -2$ in $\alpha_2 = 7$. Velja $\mathrm{g}(-2) = 1$ in $\mathrm{g}(7) = 2$.

Pri $\alpha_1 = -2$ iščemo tak vektor $\mathbf{u}_1$, da je

$$(A + 2I)\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}\,.$$

Vrstična kanonična forma za $A - 2I = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ je:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Za lastni vektor $\mathbf{u}_1$ izberimo $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Vrstična kanonična forma za $A - 7I = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix}$ je:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Za vektorja $\mathbf{u}_2$ in $\mathbf{u}_3$ izberemo

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{in} \qquad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

S pomočjo Gramm-Schmidtovega algoritma poiščemo najprej ortogonalno bazo za $\ker(A - 7I)$:

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{u}_3 + \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{w}_2 \rangle}{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle} \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{4}{5} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}.$$

Vektorje $\mathbf{u}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ moramo še normirati. Ortonormirana baza iz lastnih vektorjev za A je potem

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

$\square$

Enako kot za simetrično ali hermitsko matriko, tudi za sebiadjungirano linearno preslikavo $A : U \to U$ obstaja ortonormirana baza iz lastnih vektorjev in velja, da so vse lastne vrednosti za A realne.

4 Normalne matrike in preslikave

Splošnejši razred matrik od simetričnih in hermitskih matrik je razred normalnih matrik.

Definicija 4.1 Matrika $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ali $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je *normalna*, če je

$$AA^* = A^* A.$$

Linearna preslikava $A : U \to U$ je *normalna*, če velja $AA^* = A^* A$. $\diamondsuit$

Zgled 4.2 **1.)** Če je A simetrična ali hermitska matrika, je $AA^* = A^2 = A^* A$. Torej je A normalna.

2.) Naj bo D diagonalna matrika. Potem je D^* tudi diagonalna matrika in velja $DD^* = D^*D$. Torej je D normalna. □

Trditev 4.3 *Naj bo A normalna matrika. Potem je*

$$\ker(A - \alpha I) = \ker(A^* - \overline{\alpha} I)\,.$$

Dokaz Denimo, da je $(A - \alpha I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Potem je

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (A-\alpha I)\mathbf{u}, (A-\alpha I)\mathbf{u}\rangle = \langle \mathbf{u}, (A-\alpha I)^*(A-\alpha I)\mathbf{u}\rangle = \\ &= \langle \mathbf{u}, (A^*-\overline{\alpha} I)(A-\alpha I)\mathbf{u}\rangle = \langle \mathbf{u}, (A^*A - \overline{\alpha}A - \alpha A^* + \overline{\alpha}\alpha)\mathbf{u}\rangle = \\ &= \langle \mathbf{u}, (AA^* - \overline{\alpha}A - \alpha A^* + \overline{\alpha}\alpha)\mathbf{u}\rangle = \langle \mathbf{u}, (A-\alpha I)(A^*-\overline{\alpha} I)\mathbf{u}\rangle = \\ &= \langle (A-\alpha I)^*\mathbf{u}, (A-\alpha I)^*\mathbf{u}\rangle\ . \end{aligned}$$

Ker je skalarni produkt pozitivno definiten, je $\mathbf{0} = (A - \alpha I)^*\mathbf{u} = (A^* - \overline{\alpha} I)\mathbf{u}$. Iz gornjega računa sledi, da je $(A-\alpha I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$ natanko tedaj, ko je $(A^*-\overline{\alpha} I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$. ■

Trditev 4.4 *Če sta $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$ lastna vektorja pri različnih lastnih vrednostih normalne matrike A, potem sta $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$ ortogonalna.*

Dokaz Predpostavimo, da je $A\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}$, $A\mathbf{v} = \beta\mathbf{v}$ in $\alpha \neq \beta$. Potem sledi

$$\langle A\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \langle \alpha\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \alpha\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle\,.$$

Z uporabo prejšnje trditve dobimo še

$$\langle A\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, A^*\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \overline{\beta}\mathbf{v}\rangle = \beta\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle\,.$$

Ker je $\alpha \neq \beta$, mora biti $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 0$. ■

Izrek 4.5 (**o spektralnem razcepu za normalne matrike**) *Naj bo $A \in \mathbb{R}^n$ normalna matrika in $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ vse njene različne lastne vrednosti. Potem je*

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{j-1}^{k} \ker(A - \alpha_j I)$$

ortogonalna direktna vsota. V $\mathbb{R}^n$ obstaja ortonormirana baza iz lastnih vektorjev za A. V tej bazi A pripada diagonalna matrika.

Tudi če je $A \in \mathbb{C}^n$ normalna matrika, velja enak sklep: Naj bodo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ vse različne lastne vrednosti za A. Potem je

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{j-1}^{k} \ker(A - \alpha_j I)$$

ortogonalna direktna vsota in v $\mathbb{C}^n$ obstaja ortonormirana baza iz lastnih vektorjev za A.

Dokaz Dokaz bomo naredili le za primer, ko je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Za realne matrike je enak.

Iz trditve 4.3 in posledice 2.2 sledi, da je

$$\mathbb{C}^n = \ker(A - \alpha I) \oplus \operatorname{im}(A - \alpha I) \tag{X.4}$$

ortogonalna direktna vsota. Ker sta $\ker(A - \alpha I)$ in $\operatorname{im}(A - \alpha I)$ invariantna podprostora za A, ima A glede na razcep (X.4) obliko

$$\begin{bmatrix} \alpha I & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}.$$

Ker je $\ker(A - \alpha I) \cap \operatorname{im}(A - \alpha I) = \mathbf{0}$, α ni lastna vrednost za A_1. Torej je $\mathrm{a}(\alpha) = \mathrm{g}(\alpha)$. Ker pravkar povedano velja za vsako lastno vrednost α_j, se A da diagonalizirati. Iz trditve 4.4 sledi, da so lastni podprostori pri različnih lastnih vrednostih ortogonalni. Zato je

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{j-1}^{k} \ker(A - \alpha_j I)$$

ortogonalna direktna vsota. Unija ortonormiranih baz za $\ker(A - \alpha_j I)$, $j =$ 1,2,...,k, nam da ortonormirano bazo za $\mathbb{C}^n$ iz lastnih vektorjev za A. ■

Zgled 4.6 Pokažimo, da je $A = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{bmatrix}$ normalna in poiščimo kako ortonormirano bazo iz lastnih vektorjev. Ker velja

$$AA^* = A^*A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

je matrika normalna. Karakteristični polinom za A je $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$. Lastni vrednosti sta $\alpha_1 = 1 + \mathrm{i}$ in $\alpha_2 = 1 - \mathrm{i}$. Za pripadajoča lastna vektorja izberemo $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ in $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$. Očitno velja

$$(A-(1+\mathrm{i})I)\,\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}-\mathrm{i} & \mathrm{i}\\ \mathrm{i} & -\mathrm{i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

in

$$(A-(1-\mathrm{i})I)\,\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}\mathrm{i} & \mathrm{i}\\ \mathrm{i} & \mathrm{i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}.$$

Vektorja $\mathbf{u}_1$ in $\mathbf{u}_2$ sta pravokotna. Iskana ortonormirana baza je

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right\}. \qquad \square$$

Enako kot za normalno matriko, tudi za normalno linearno preslikavo $A : U \to U$ obstaja ortonormirana baza iz lastnih vektorjev, torej se jo da diagonalizirati v ortonormirani bazi.

5 Ortogonalne in unitarne matrike ter izometrije

Denimo, da je $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ ortonormirana baza za $\mathbb{R}^n$. Naj bo $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrika, katere stolpci so $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$. Potem velja

$$Q^\top Q = I\,.$$

Matrika, za katero je $Q^\top Q = I$ imenujemo *ortogonalna*. Na splošno definiramo:

Definicija 5.1 Če je $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrika, za katero je $Q^*Q = I$, potem rečemo, da je Q *unitarna matrika*.

Linearna preslikava $Q : U \to U$, kjer je U vektorski prostor s skalarnim produktom nad $\mathbb{R}$, je *ortogonalna*, če je $QQ^* = Q^*Q = I$.

Linearna preslikava $Q : U \to U$, kjer je U vektorski prostor s skalarnim produktom nad $\mathbb{C}$, je *unitarna*, če je $QQ^* = Q^*Q = I$. $\Diamond$

Matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je torej ortogonalna, če je $Q^{-1} = Q^\top$ in matrika $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je unitarna, če je $Q^{-1} = Q^*$.

Zgled 5.2 Poiščimo vse ortogonalne matrike v $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Matrika $Q \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ je ortogonalna, če njena stolpca tvorita ortonormirano bazo za $\mathbb{R}^2$. Označimo

$$Q = \begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix}.$$

Stolpec $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ je normiran, če je $a^2 + b^2 = 1$. Torej obstaja tak $\alpha \in [0, 2\pi)$, da je $a = \cos\alpha$ in $b = \sin\alpha$. Tudi stolpec $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ je normiran in pravokoten na stolpec $\begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}$. Iz prvega poglavja vemo, da imamo za $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ dve možnosti. To sta

$$\begin{bmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{bmatrix} \qquad \text{in} \qquad \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Vse ortogonalne matrike v $\mathbb{R}^{2\times 2}$ so torej

$$R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad Z_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix} \quad \text{za } \alpha \in [0, 2\pi)\,. \qquad \square$$

Iz definicije vidimo, da je vsaka ortogonalna (oz. unitarna) matrika normalna. Iz izreka 4.5 sledi:

Posledica 5.3 *Vsaka ortogonalna in vsaka unitarna matrika se da diagonalizirati (nad $\mathbb{C}$) in zanjo obstaja ortonormirana baza iz lastnih vektorjev.*

Trditev 5.4 *Če je α lastna vrednost ortogonalne ali unitarne matrike A, potem je $|\alpha| = 1$.*

Dokaz Za $\mathbf{v} \in \ker(A - \alpha I)$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ velja

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \;\; = \;\; \langle A\mathbf{v}, A\mathbf{v} \rangle = \langle \alpha\mathbf{v}, \alpha\mathbf{v} \rangle = \alpha\overline{\alpha}\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = |\alpha|^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle\,.$$

Ker je $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \neq 0$, je $|\alpha|^2 = 1$. Torej je $|\alpha| = 1$. ■

Zgled 5.5 Naj bo $Z_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$ ortogonalna matrika iz zgleda 5.2. Karakteristični polinom za Z_α je $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$. Lastni vrednosti sta tako $\alpha_1 = 1$ in $\alpha_2 = -1$. S pomočjo formul za sinus in kosinus polovičnih kotov dobimo

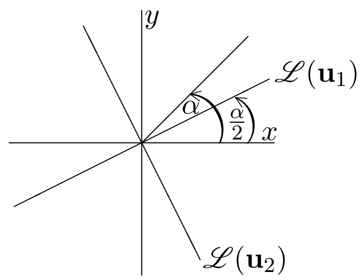
$$Z_\alpha - I = \begin{bmatrix} \cos\alpha - 1 & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\sin^2\frac{\alpha}{2} & 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \\ 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} & -2\cos^2\frac{\alpha}{2} \end{bmatrix}.$$

Normiran lastni vektor pri $\alpha_1 = 1$ je potem

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} \end{bmatrix}.$$

Lastni vektorji pri $\alpha_2 = -1$ so pravokotni na $\mathbf{u}_1$. Izberemo npr. $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -\sin\frac{\alpha}{2} \\ \cos\frac{\alpha}{2} \end{bmatrix}$.

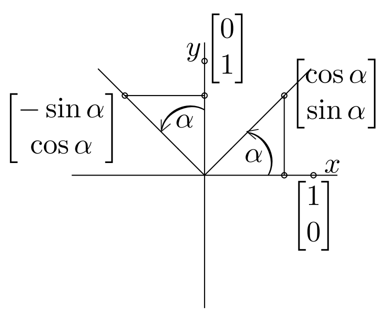
Kaj je geometrični opis preslikave podane z množenjem z Z_α? Ta preslikava je zrcaljenje prek premice $\mathscr{L}(\mathbf{u}_1)$, to je prek premice z enačbo $y = (\tan\frac{\alpha}{2})x$.



□

Zgled 5.6 Poiščimo še lastni vrednosti ortogonalne matrike R_α iz zgleda 5.2 in geometrični opis delovanja R_α na $\mathbb{R}^2$. Karakteristični polinom za $R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ je $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\cos\alpha\lambda + 1$. Lastni vrednosti sta $\alpha_1 = \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha$ in $\alpha_2 = \cos\alpha - \mathrm{i}\sin\alpha$. Razen ko je $\alpha = 0$ ali $\alpha = \pi$, sta α_1 in α_2 nerealni kompleksni števili.

Preslikava R_α je rotacija za kot α okoli točke $\mathbf{0}$. O tem se zlahka prepričamo, če poiščemo sliki standardnih baznih vektorjev $\mathbf{e}_1$ in $\mathbf{e}_2$:



□

Spomnimo se, da je v vektorskem prostoru U skalarnim produktom $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ norma vektorja definirana s predpisom $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle}$.

Definicija 5.7 Linearno preslikavo $A : U \to U$ imenujemo (*linearna*) *izometrija*, če je

$$\|A\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}\| \qquad \text{za vse } \mathbf{u} \in U\,. \qquad \Diamond$$

Izometrije so linearne preslikave, ki ohranjajo normo in zato ohranjajo tudi razdaljo med točkami.

Zgled 5.8 Če je Q ortogonalna preslikava, potem je

$$\|Q\mathbf{u}\|^2 = \langle Q\mathbf{u}, Q\mathbf{u}\rangle = \langle \mathbf{u}, Q^*Q\mathbf{u}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = \|\mathbf{u}\|^2 .$$

Zato je Q linearna izometrija. □

Izrek 5.9 (**Polarizacijska enakost**) *Če je U vektorski prostor s skalarnim produktom nad $\mathbb{R}$, potem za poljubna $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ velja*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \frac{1}{4}\left(\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2\right) .$$

Če je U vektorski prostor s skalarnim produktom nad $\mathbb{C}$, potem za poljubna $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ velja

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \frac{1}{4}\left(\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 + \mathrm{i}\|\mathbf{u}+\mathrm{i}\mathbf{v}\|^2 - \mathrm{i}\|\mathbf{u}-\mathrm{i}\mathbf{v}\|^2\right) .$$

Dokaz Dokaz je direkten račun.

Nad $\mathbb{R}$ imamo:

$$\begin{gathered}
\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = \\
= \langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}\rangle - \langle \mathbf{u}-\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v}\rangle = \\
= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = \\
= 4\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle .
\end{gathered}$$

Nad $\mathbb{C}$ dobimo:

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 + \mathrm{i}\|\mathbf{u}+\mathrm{i}\mathbf{v}\|^2 - \mathrm{i}\|\mathbf{u}-\mathrm{i}\mathbf{v}\|^2 = \\
&= \langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}\rangle - \langle \mathbf{u}-\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v}\rangle + \mathrm{i}\langle \mathbf{u}+\mathrm{i}\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathrm{i}\mathbf{v}\rangle - \mathrm{i}\langle \mathbf{u}-\mathrm{i}\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathrm{i}\mathbf{v}\rangle = \\
&= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle + \\
&\quad + \mathrm{i}\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle + \mathrm{i}\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle - \mathrm{i}\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle - \mathrm{i}\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = \\
&= 4\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle .
\end{aligned}$$

■

Trditev 5.10 *Linearna preslikava $A : U \to U$ je izometrija natanko tedaj, ko je $\langle A\mathbf{u}, A\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$ za vse $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$.*

Dokaz Če A ohranja skalarni produkt, tj. $\langle A\mathbf{u}, A\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$, velja tudi

$$\|A\mathbf{u}\|^2 = \langle A\mathbf{u}, A\mathbf{u}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = \|\mathbf{u}\|^2 .$$

Zato je A izometrija.

Denimo, da je A izometrija. Potem iz polarizacijske enakosti sledi (nad $\mathbb{R}$)

$$\begin{aligned}\langle A\mathbf{u}, A\mathbf{v}\rangle &= \frac{1}{4}\left(\|A\mathbf{u}+A\mathbf{v}\|^2 - \|A\mathbf{u}-A\mathbf{v}\|^2\right) = \\ &= \frac{1}{4}\left(\|A(\mathbf{u}+\mathbf{v})\|^2 - \|A(\mathbf{u}-\mathbf{v})\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2\right) = \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle\,.\end{aligned}$$

Dokaz nad obsegom kompleksnih števil $\mathbb{C}$ je podoben. ■

Izrek 5.11 *Linearna preslikava $A : U \to U$ je izometrija natanko tedaj, ko je A ortogonalna (oziroma unitarna) .*

Dokaz V zgledu 5.8 smo videli, da je ortogonalna (oz. unitarna) preslikava izometrija.

Predpostavimo, da je A izometrija. Potem je po trditvi 5.10

$$\langle A\mathbf{u}, A\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle \quad \text{za vse } \mathbf{u} \text{ in } \mathbf{v} \in U\,.$$

Zato je $\langle A^*A\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$ za vse $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$. Iz trditve 3.6 sledi $(A^*A - I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$ za vse $\mathbf{u}$ in $A^*A = I$. Torej je A ortogonalna (oziroma unitarna). ■

Trditev 5.12 *Če je $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ izometrija, potem A ohranja kote.*

Dokaz Kot med (neničelnima) vektorjema $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$ je

$$\cos\alpha = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}\,.$$

Ker je A izometrija, je potem $\cos\alpha = \frac{\langle A\mathbf{u}, A\mathbf{v}\rangle}{\|A\mathbf{u}\|\|A\mathbf{v}\|}$. Torej je α tudi kot med $A\mathbf{u}$ in $A\mathbf{v}$. ■

Posledica 5.13 *Izometrija slika ortonormirano množico v ortonormirano množico.*

Zgled 5.14 Linearne izometrije $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ so podane z ortogonalnimi matrikami iz $\mathbb{R}^{2\times 2}$. V zgledih 5.2, 5.5 in 5.6 smo pokazali, da so ortogonalne matrike v $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ravno matrike Z_α in R_α, ki predstavljajo ravno vsa zrcaljenja in vse rotacije v $\mathbb{R}^2$. Torej so vse linearne izometrije v ravnini zrcaljenja ali rotacije. □

6 Pozitivno-definitne matrike

Definicija 6.1 Simetrična ali hermitska matrika A je *pozitivno-definitna*, če je $\langle A\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle > 0$ za vse neničelne vektorje $\mathbf{u}$. Simetrična ali hermitska matrika A je *pozitivno-semidefinitna*, če je $\langle A\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle \geq 0$ za vse vektorje $\mathbf{u}$. $\Diamond$

Zgled 6.2 Naj bo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Potem za $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ velja $\langle A\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = x^2 + 2y^2 + 3z^2$. Če je $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, je $x^2 + 2y^2 + 3z^2 > 0$, zato je A pozitivno definitna. $\Box$

Izrek 6.3 *Simetrična ali hermitska matrika A je pozitivno-definitna natanko tedaj, ko so vse lastne vrednosti A pozitivne.*

Simetrična ali hermitska matrika A je pozitivno-semidefinitna natanko tedaj, ko so vse lastne vrednosti A nenegativne.

Dokaz Naj bo α lastna vrednost za pozitivno-definitno matriko A in $\mathbf{u}$ pripadajoči lastni vektor. Potem je $0 < \langle A\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = \langle \alpha\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = \alpha\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle$. Ker je $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle > 0$, mora biti $\alpha > 0$.

Predpostavimo sedaj, da so vse lastne vrednosti simetrične ali hermitske matrike A pozitivne. Potem obstaja taka ortonormirana baza, da ima A v njej diagonalno matriko D. Torej je

$$A = QDQ^{-1},$$

kjer stolpci Q tvorijo ortonormirano bazo. Zato je Q ortogonalna, oziroma unitarna, in je $A = QDQ^*$. Potem za neničeln vektor $\mathbf{u}$ velja

$$\langle A\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = \langle QDQ^*\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = \langle D(Q^*\mathbf{u}), Q^*\mathbf{u}\rangle .$$

Označimo z $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ diagonalne elemente D (tj. lastne vrednosti za A) in

$$Q^*\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}.$$

Potem je $\langle A\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j |u_j|^2 > 0$.

Dokaz za primer, ko je A pozitivno-semidefinitna je enak, le strogi neenačaj $>$ moramo povsod zamenjati z $\geq$. $\blacksquare$

Zgled 6.4 Naj bo $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ dana matrika. Potem je matrika $A = B^*B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ pozitivno-semidefinitna. Velja namreč

$$\langle A\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = \langle B^*B\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = \langle B\mathbf{u}, B\mathbf{u}\rangle \geq 0$$

za vse $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$.

Če je B obrnljiva, je A celo pozitivno-definitna. Tedaj za neničeln vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ velja

$$\langle A\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = \langle B^*B\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = \langle B\mathbf{u}, B\mathbf{u}\rangle > 0\,,$$

saj je $B\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$.

Enako pokažemo, da tudi za realno matriko $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ velja: Matrika $A = B^\top B$ je pozitivno-semidefinitna in je pozitivno definitna, če je B obrnljiva. □

Trditev 6.5 *Simetrična ali hermitska matrika A je pozitivno-definitna natanko tedaj, ko je $A = B^2$ za kako obrnljivo simetrično oziroma hermitsko matriko B. V tem primeru za B vedno lahko vzamemo pozitivno-definitno matriko.*

Dokaz Če je B obrnljiva simetrična ali hermitska matrika, potem je po zgledu 6.4 matrika $A = B^*B = B^2$ pozitivno-definitna.

Obratno, naj bo A pozitivno-definitna. Po spektralnem izreku za simetrične ali hermitske matrike je

$$A = QDQ^*\,,$$

kjer je D diagonalna matrika in Q ortogonalna, oziroma unitarna, matrika. Ker je A pozitivno-definitna, so diagonalni elementi D pozitivna (realna) števila. Označimo

$$D = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix}, \quad \beta_j = \sqrt{\alpha_j} \text{ za } j = 1, 2, \dots, n$$

in

$$E = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_n \end{bmatrix}.$$

Potem je $E^2 = D$ in za $B = QEQ^*$ velja:

$$B^2 = QEQ^*QEQ^* = QE^2Q^* = QDQ^* = A$$

in

$$B^* = (QEQ^*)^* = (Q^*)^* E^* Q^* = QEQ^* = B\,.$$

Ker je $\beta_j > 0$ za vse j, je B pozitivno-definitna. ∎

Zgled 6.6 Dana je matrika $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$. Preverimo, da je pozitivno-definitna in poiščimo tako simetrično matriko B, da bo $B^2 = A$. Takoj vidimo, da je $A = A^*$. Karakteristični polinom za A je

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 10\lambda + 9 = (\lambda - 9)(\lambda - 1).$$

Lastni vrednosti 1 in 9 sta pozitivni, zato je A pozitivno-definitna. Ortogonalna lastna vektorja za A sta: $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ pri $\alpha_1 = 1$ in $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ pri $\alpha_2 = 9$. Torej je

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Matrika $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ je taka, da je $E^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$. Potem je

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$ □

Izrek 6.7 *Naj bo A pozitivno definitna matrika in $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_1$ običajni skalarni produkt. Potem je preslikava podana s predpisom*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_2 = \langle A\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_1$$

za vse vektorje $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$ tudi skalarni produkt.

Dokaz Izrek bomo dokazali za primer, ko je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dokaz za primer, ko je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je podoben.

Preveriti moramo, da za $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_2 : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ veljajo vsi trije aksiomi skalarnega produkta. Za $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ in $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ velja

$$\begin{aligned} \langle \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2, \mathbf{v}\rangle_2 &= \langle A(\alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2), \mathbf{v}\rangle_1 = \langle \alpha_1 A\mathbf{u}_1 + \alpha_2 A\mathbf{u}_2, \mathbf{v}\rangle_1 = \\ &= \alpha_1\langle A\mathbf{u}_1, \mathbf{v}\rangle_1 + \alpha_2\langle A\mathbf{u}_2, \mathbf{v}\rangle_1 = \alpha_1\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v}\rangle_2 + \alpha_2\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}\rangle_2\,. \end{aligned}$$

Za $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ velja

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle_2 = \langle A\mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle_1 = \overline{\langle \mathbf{u}, A\mathbf{v}\rangle_1} = \overline{\langle A\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_1} = \overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_2}\,.$$

Nazadnje za neničeln vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ velja $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle_2 = \langle A\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle_1 > 0$. Torej je $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle_2 \geq 0$ in $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle_2 = 0$ natanko tedaj, ko je $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. ∎