Poglavje IX

Vektorski prostori s skalarnim produktom

Skalarni produkt dveh vektorjev v $\mathbb{R}^n$ smo spoznali v prvem poglavju. Sedaj bomo pojem skalarnega produkta razširili na poljuben vektorski prostor V nad obsegoma $\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$. Znani skalarni produkt na $\mathbb{R}^n$ bo le poseben primer tako definiranega skalarnega produkta.

1 Definicija in osnovne lastnosti skalarnega produkta

Definicija 1.1 Naj bo V vektorski prostor nad $\mathbb{R}$. Preslikava

$$\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

je *skalarni produkt*, če zanjo velja:

1.) linearnost v prvem faktorju: $\langle \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \alpha\langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle + \beta\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$ za vse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in vse $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

2.) simetričnost: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle$ z vse $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

3.) pozitivna definitnost: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle \geq 0$ za vse $\mathbf{u} \in V$ in $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = 0$ natanko tedaj, ko je $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. $\Diamond$

Zgled 1.2 V vektorskem prostoru $\mathbb{R}^n$ smo za običajni skalarni produkt

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \quad \text{za} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \text{ in } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

v prvem poglavju preverili vse tri lastnosti iz definicije. □

Zgled 1.3 V vektorskem prostoru $V = \mathbb{R}_n[x]$ definiramo preslikavo $\langle\, \mathbf{.}\,, \mathbf{.}\, \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\mathrm{d}x\,.$$

Preverimo, da je ta preslikava skalarni produkt. Za dokaz linearnosti v prvem faktorju izberimo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in $p, q, r \in \mathbb{R}_n[x]$. Potem je

$$\langle \alpha p + \beta q, r \rangle = \int_0^1 (\alpha p(x) + \beta q(x))\, r(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (\alpha p(x)r(x) + \beta q(x)r(x))\, \mathrm{d}x =$$
$$= \alpha \int_0^1 p(x)r(x)\mathrm{d}x + \beta \int_0^1 q(x)r(x)\mathrm{d}x = \alpha\langle p, r\rangle + \beta\langle q, r\rangle\,.$$

Simetričnost sledi iz dejstva, da je množenje polinomov komutativno:

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 q(x)p(x)\mathrm{d}x = \langle q, p\rangle\,.$$

Kvadrat polinoma je nenegativna funkcija. Iz matematične analize vemo, da so polinomi zvezne funkcije in da ima določeni integral zvezne nenegativne funkcije nenegativno vrednost. Torej je $\langle p, p \rangle = \int_0^1 p^2(x)\mathrm{d}x \geq 0$ za vse $p \in \mathbb{R}_n[x]$. Še več, določeni integral zvezne nenegativne funkcije je enak 0, če in samo če je ta funkcija enaka 0 povsod na intervalu, po katerem integriramo. Ker ima neničeln polinom le končno mnogo ničel, velja $\langle p, p \rangle = 0$ natanko tedaj, ko je $p = 0$. □

Definirajmo še skalarni produkt v vektorskih prostorih nad kompleksnimi števili.

Definicija 1.4 Naj bo V vektorski prostor nad $\mathbb{C}$. Preslikava

$$\langle\, \mathbf{.}\,, \mathbf{.}\, \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$$

je *skalarni produkt*, če zanjo velja:

1.) linearnost v prvem faktorju: $\langle \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \alpha\langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle + \beta\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$ za vse $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ in vse $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

2.) konjugirana simetričnost: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle}$ z vse $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

3.) pozitivna definitnost: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$ za vse $\mathbf{u} \in V$ in $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ natanko tedaj, ko je $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. $\Diamond$

Zgled 1.5 Naj bo $V = \mathbb{C}^n$ in definirajmo preslikavo

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{j=1}^{n} u_j \overline{v_j} \quad \text{za} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \text{ in } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \text{ iz } \mathbb{C}^n.$$

Preverimo, da je tako definirana preslikava skalarni produkt.

Označimo še $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$. Potem je

$$\begin{aligned} \langle \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle &= \sum_{j=1}^{n} (\alpha u_j + \beta v_j) \overline{w_j} = \sum_{j=1}^{n} (\alpha u_j \overline{w_j} + \beta v_j \overline{w_j}) = \\ &= \alpha \sum_{j=1}^{n} u_j \overline{w_j} + \beta \sum_{j=1}^{n} v_j \overline{w_j} = \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \beta \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \,. \end{aligned}$$

Preslikava je konjugirano simetrična, saj velja

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{j=1}^{n} u_j \overline{v_j} = \overline{\sum_{j=1}^{n} v_j \overline{u_j}} = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle} \,.$$

Spomnimo se, da za vsako kompleksno število $\alpha = a + ib$ velja $\alpha \overline{\alpha} = |\alpha|^2 = a^2 + b^2 \geq 0$. Še več, $\alpha \overline{\alpha} = 0$ natanko tedaj, ko je $\alpha = 0$.

Za $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ potem sledi:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \sum_{j=1}^{n} u_j \overline{u_j} = \sum_{j=1}^{n} |u_j|^2 \geq 0 \quad \text{in}$$

$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ natanko tedaj, ko je $u_j = 0$ za vse j. $\square$

Trditev 1.6 *V vektorskem prostoru s skalarnim produktom velja* $\langle \mathbf{v}, \mathbf{0} \rangle = 0$ *in* $\langle 0, \mathbf{v} \rangle = 0$ *za vse vektorje* $\mathbf{v} \in V$.

Dokaz Za nek vektor $\mathbf{u} \in V$ pišimo $\mathbf{0} = \mathbf{u} - \mathbf{u}$. Iz linearnosti skalarnega produkta sledi

$$\langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u} - \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0.$$

Zaradi simetričnosti (oziroma konjugirane simetričnosti) skalarnega produkta sledi tudi $\langle \mathbf{v}, \mathbf{0} \rangle = 0$. ■

Trditev 1.7 *Skalarni produkt je konjugirano linearen v drugem faktorju. Velja*

$$\langle \mathbf{u}, \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w} \rangle = \overline{\alpha}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \overline{\beta}\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$$

za vse $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *in* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

Dokaz Iz konjugirane simetričnosti in linearnosti v prvem faktorju sledi

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u}, \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w} \rangle &= \overline{\langle \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle} = \overline{\alpha\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \beta\langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle} = \\ &= \overline{\alpha}\,\overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle} + \overline{\beta}\,\overline{\langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle} = \overline{\alpha}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \overline{\beta}\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle\,.\end{aligned}$$

■

Opomba 1.8 Če je V vektorski prostor s skalarnim produktom nad obsegom realnih števil, potem je skalarni produkt linearen tudi v drugem faktorju. To sledi iz prejšnje trditve, saj za realna števila velja $\overline{\alpha} = \alpha$. Poslej bomo privzeli, da so skalarji kompleksna števila, razen če bomo posebej poudarili, da so to realna števila. Rezultate nad kompleksnimi števili se da največkrat enostavno povedati tudi nad realnimi števili. ◊

Če je $\langle\, .\,,\, .\,\rangle$ skalarni produkt na vektorskem prostoru V, potem s predpisom $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$ definiramo *normo* vektorja $\mathbf{v}$. V primeru $\mathbb{R}^n$ z običajnim skalarnim produktom je norma predstavljala (običajno) dolžino vektorja $\mathbf{v}$.

Iz definicije skalarnega produkta takoj izpeljemo dve od treh karakterističnih lastnosti norme:

1.) (pozitivna definitnost) $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ za vse $\mathbf{v} \in V$ in $\|\mathbf{v}\| = 0$ natanko tedaj, ko je $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

2.) (absolutna homogenost) $\|\alpha\mathbf{v}\| = |\alpha|\|\mathbf{v}\|$ za vse $\alpha \in \mathbb{C}$ in vse $\mathbf{v} \in V$.

3.) (trikotniška neenakost) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ za vse $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in V$.

Dokaz 1.) Ker je skalarni produkt pozitivno definiten, velja $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \geq 0$ za vse $\mathbf{v} \in V$ in $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} = 0$ natanko tedaj, ko je $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

2.) Iz linearnosti v prvem faktorju in konjugirane linearnosti v drugem faktorju sledi

$$\|\alpha\mathbf{v}\|^2 = \langle\alpha\mathbf{v}, \alpha\mathbf{v}\rangle = \alpha\overline{\alpha}\langle\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = |\alpha|^2\|\mathbf{v}\|^2 .$$

Ker sta obe strani nenegativni, je potem

$$\|\alpha\mathbf{v}\| = |\alpha|\|\mathbf{v}\| .$$

3.) Trikotniško neenakost bomo pokazali kasneje. ■

Definicija 1.9 Vektorja $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$ sta *pravokotna* (ali *ortogonalna*), če je

$$\langle\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 0 .$$

Trditev 1.10 *Če sta* $\mathbf{u}$ *in* $\mathbf{v}$ *dva vektorja in je* $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$*, potem sta vektorja* $\mathbf{u}$ *in* $\mathbf{v} - \frac{\langle\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle}{\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle}\mathbf{u}$ *pravokotna.*

Dokaz Izračunajmo skalarni produkt teh dveh vektorjev. Pri tem upoštevajmo lastnosti skalarnega produkta:

$$\left\langle \mathbf{v} - \frac{\langle\mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle}{\langle\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle}\mathbf{u}, \mathbf{u} \right\rangle = \langle\mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle - \frac{\langle\mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle}{\langle\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle}\langle\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = \langle\mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle - \langle\mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle = 0 .$$ ■

Izrek 1.11 (**Pitagorov izrek**) *Če sta vektorja* $\mathbf{u}$ *in* $\mathbf{v}$ *pravokotna, je*

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 .$$

Dokaz Če sta $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$ pravokotna, je $\langle\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \langle\mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle = 0$. Potem velja

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= \langle\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}\rangle = \langle\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle + \langle\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \langle\mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle + \langle\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = \\ &= \langle\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle + \langle\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 . \end{aligned}$$ ■

Izrek 1.12 (**Cauchy-Schwarzeva neenakost**) *Za poljubna vektorja* $\mathbf{u}$ *in* $\mathbf{v}$ *iz* V *velja*

$$|\langle\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| . \tag{IX.1}$$

Enakost velja natanko tedaj, ko sta $\mathbf{u}$ *in* $\mathbf{v}$ *linearno odvisna.*

Dokaz Če je $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, očitno velja enakost v (IX.1).
Privzemimo, da je $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. Potem sta po trditvi 1.10 vektorja $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v} - \frac{\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle}{\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle}\mathbf{u}$ pravokotna. Torej sta pravokotna tudi vektorja $\frac{\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle}{\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle}\mathbf{u}$ in $\mathbf{v} - \frac{\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle}{\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle}\mathbf{u}$. Po Pitagorovem izreku je potem

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|^2 &= \left\|\mathbf{v} - \frac{\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle}{\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle}\mathbf{u} + \frac{\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle}{\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle}\mathbf{u}\right\|^2 = \\ &= \left\|\mathbf{v} - \frac{\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle}{\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle}\mathbf{u}\right\|^2 + \left\|\frac{\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle}{\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle}\mathbf{u}\right\|^2 . \end{aligned}$$

Ker je norma vektorja nenegativno število, velja

$$\|\mathbf{v}\|^2 \geq \left\|\frac{\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle}{\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle}\mathbf{u}\right\|^2 \quad \text{in} \quad \|\mathbf{v}\| \geq \left\|\frac{\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle}{\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle}\mathbf{u}\right\| . \tag{IX.2}$$

Če upoštevamo absolutno homogenost norme, dobimo

$$\|\mathbf{v}\| \geq \frac{|\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle|}{|\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle|}\|\mathbf{u}\| = \frac{|\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle|}{\|\mathbf{u}\|} .$$

Ker je $|\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle| = |\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle|$, tako dobimo

$$|\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| .$$

Opazimo, da v neenakosti (IX.2) velja enačaj natanko tedaj, ko je

$$\left\|\mathbf{v} - \frac{\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle}{\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle}\mathbf{u}\right\| = 0 .$$

Ker je norma pozitivno definitna, je tedaj

$$\mathbf{v} = \frac{\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle}{\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle}\mathbf{u}$$

in zato sta $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$ linearno odvisna. Če je $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$, je potem

$$|\langle \mathbf{u},\alpha\mathbf{u}\rangle| = |\overline{\alpha}\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle| = |\alpha|\|\mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{u}\|\|\alpha\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| .$$

■

Dokažimo sedaj še trikotniško neenakost:

Dokaz Za $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ velja

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle \leq \\ &\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\,|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| + \|\mathbf{v}\|^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 = \\ &= (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2 \,. \end{aligned}$$

Pri prvi neenakosti smo upoštevali trikotniško neenakost za absolutno vrednost kompleksnih števil, druga neenakost pe je Cauchy-Schwarzeva neenakost. Ker so norme vektorjev nenegativna števila, je potem

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \,. \qquad \blacksquare$$

2 Ortogonalne in ortonormirane množice

Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom nad obsegom kompleksnih števil.

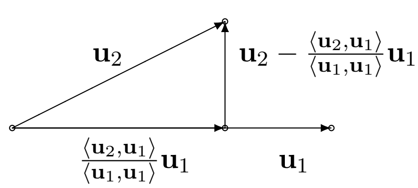
Definicija 2.1 Množica neničelnih vektorjev $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ je *ortogonalna*, če je $\langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k\rangle = 0$ za vsak par indeksov j, k, $j \neq k$.

Množica $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ je *ortonormirana*, če je ortogonalna in velja $\|\mathbf{v}_j\| = 1$ za vse j. $\Diamond$

Zgled 2.2 Vzemimo $V = \mathbb{C}^n$ s standardnim skalarnim produktom in standardno bazo $\mathscr{S} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Potem je $\mathscr{S}$ ortonormirana množica:

$$\langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k\rangle = \begin{cases} 0 \text{ , če } j \neq k, \\ 1 \text{ , če } j = k. \end{cases} \qquad \square$$

Če sta $\mathbf{u}_1$ in $\mathbf{u}_2$ linearno neodvisna vektorja v $\mathbb{R}^n$, potem sta po trditvi 1.10 vektorja $\mathbf{u}_1$ in $\mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1\rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1\rangle}\mathbf{u}_1$ ortogonalna. V $\mathbb{R}^n$ to lahko ponazorimo s sliko:



Trditev 2.3 *Ortogonalna množica vektorjev je linearno neodvisna.*

Dokaz Po definiciji je množica vektorjev $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ ortogonalna, če je $\mathbf{v}_j \neq \mathbf{0}$ za vse j in $\langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_l \rangle = 0$ za vsak par različnih indeksov j in l. Denimo, da je $\sum_{j=1}^k \alpha_j \mathbf{v}_j = \mathbf{0}$. Potem za vsak indeks l velja

$$0 = \left\langle \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_l \right\rangle = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_l \rangle = \alpha_l \langle \mathbf{v}_l, \mathbf{v}_l \rangle \,.$$

Ker je $\mathbf{v}_l \neq \mathbf{0}$, je $\langle \mathbf{v}_l, \mathbf{v}_l \rangle \neq 0$. Zato mora biti $\alpha_l = 0$. Torej so vektorji $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ linearno neodvisni. ■

Naj bodo $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ linearno neodvisni vektorji v $\mathbb{R}^n$. Označimo

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_1 &= \mathbf{u}_1 \,, \\
\mathbf{w}_2 &= \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \mathbf{w}_1 \,, \\
\mathbf{w}_3 &= \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{w}_2 \rangle}{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle} \mathbf{w}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \mathbf{w}_1 \,.
\end{aligned}$$

Vemo, da sta vektorja $\mathbf{w}_1$ in $\mathbf{w}_2$ ortogonalna. Preverimo, da je tudi $\mathbf{w}_3$ ortogonalen na $\mathbf{w}_1$ in $\mathbf{w}_2$:

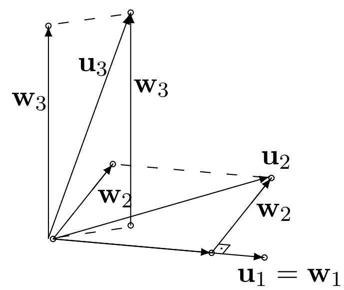
$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_1 \rangle &= \left\langle \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{w}_2 \rangle}{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle} \mathbf{w}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \right\rangle = \\
&= \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{w}_1 \rangle - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{w}_2 \rangle}{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle} \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1 \rangle - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle = \\
&= \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{w}_1 \rangle - \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{w}_1 \rangle = 0
\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_2 \rangle &= \left\langle \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{w}_2 \rangle}{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle} \mathbf{w}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \right\rangle = \\
&= \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{w}_2 \rangle - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{w}_2 \rangle}{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle} \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle = \\
&= \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{w}_2 \rangle - \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{w}_2 \rangle = 0 \,.
\end{aligned}$$

Tako konstruirana množica vektorjev $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ je ortogonalna.

V $\mathbb{R}^3$ je vektor $\frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{w}_2 \rangle}{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle} \mathbf{w}_2 + \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \mathbf{w}_1$ pravokotna projekcija vektorja $\mathbf{u}_3$ na ravnino določeno z vektorji $\mathbf{0}, \mathbf{u}_1$ in $\mathbf{u}_2$. To lahko ponazorimo s sliko:



Zgoraj opisani postopek lahko posplošimo na poljuben vektorski prostor (končne razsežnosti) s skalarnim produktom in na poljubno končno množico linearno neodvisnih vektorjev. Postopek konstrukcije ortogonalnih vektorjev $\mathbf{w}_j$ imenujemo *Gramm-Schmidtov algoritem*:

Dana je množica linearno neodvisnih vektorjev $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$. Postavimo $\mathbf{w}_1 = \mathbf{u}_1$. Potem zaporedoma za $j = 2, 3, \ldots, n$ izračunamo vektor

$$\mathbf{w}_j = \mathbf{u}_j - \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\langle \mathbf{u}_j, \mathbf{w}_k \rangle}{\langle \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_k \rangle} \mathbf{w}_k \,.$$

Dobljena množica vektorjev $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ je ortogonalna. Vektorje $\mathbf{w}_j$ še normiramo:

$$\mathbf{e}_j = \frac{1}{\|\mathbf{w}_j\|} \mathbf{w}_j \quad j = 1, 2, \ldots, n \,.$$

Množica vektorjev $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ je ortonormirana.

Dokažimo ortogonalnost množice $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ in ortonormiranost množice $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$.

Trditev 1.10 nam pove, da sta $\mathbf{w}_1$ in $\mathbf{w}_2$ ortogonalna. Dokaz ortogonalnosti naredimo z indukcijo. Predpostavimo, da so vektorji $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{k-1}\}$ ortogonalni. Potem za $j = 1, 2, \ldots, k-1$ velja

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_j \rangle &= \left\langle \mathbf{u}_k - \sum_{l=1}^{k-1} \frac{\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_l \rangle}{\langle \mathbf{w}_l, \mathbf{w}_l \rangle} \mathbf{w}_l, \mathbf{w}_j \right\rangle = \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_j \rangle - \sum_{l=1}^{k-1} \frac{\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_l \rangle}{\langle \mathbf{w}_l, \mathbf{w}_l \rangle} \langle \mathbf{w}_l, \mathbf{w}_j \rangle = \\ &= \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_j \rangle - \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_j \rangle = 0 \,. \end{aligned}$$

Preveriti moramo še, da so vektorji $\mathbf{w}_j$ neničelni.

Množica vektorjev $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ je linearno neodvisna. Če koeficiente razvoja vektorjev $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ po $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ zaporedoma postavimo v stolpce, dobimo zgornje-trikotno matriko z enicami po diagonali. Torej je ta matrika obrnljiva in zato so tudi vektorji $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ linearno neodvisni.

Množica vektorjev $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ je ortogonalna. Ker je $\langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_j \rangle = \left\langle \frac{\mathbf{w}_j}{\|\mathbf{w}_j\|}, \frac{\mathbf{w}_j}{\|\mathbf{w}_j\|} \right\rangle = \frac{1}{\|\mathbf{w}_j\|^2}\langle \mathbf{w}_j, \mathbf{w}_j \rangle = 1$, je množica vektorjev $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ ortonormirana.

Izrek 2.4 *Naj bo $U \subseteq V$ neničeln vektorski podprostor. Potem ima U ortonormirano bazo.*

Dokaz S pomočjo Gramm-Schmidtovega postopka iz dane baze za U dobimo ortonormirano bazo za U. ■

Zgled 2.5 Uporabimo Gramm-Schmidtov algoritem na množici vektorjev

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ v } \mathbb{C}^3.$$

Potem je

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{w}_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{w}_3 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Dobljena ortonormirana baza za $\mathbb{C}^3$ je

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$ □

Zgled 2.6 V vektorskem prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ je skalarni produkt dan s predpisom $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\mathrm{d}x$. Poiščimo kako ortonormirano bazo. Izberimo standardno bazo $\{1, x, x^2\}$ in uporabimo Gramm-Schmidtov algoritem. Najprej je

$\mathbf{w}_1 = 1$. Izračunajmo skalarna produkta

$$\langle 1, 1\rangle = \int_0^1 1 \mathrm{d}x = 1$$

in

$$\langle x, 1\rangle = \int_0^1 x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,.$$

Potem je $\mathbf{w}_2 = x - \frac{1}{2}$. Za določitev vektorja $\mathbf{w}_3$ moramo izračunati še naslednje skalarne produkte:

$$\langle x^2, 1\rangle = \int_0^1 x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,,$$
$$\langle x^2, x - \frac{1}{2}\rangle = \int_0^1 (x^3 - \frac{1}{2}x^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{12}\,,$$

in

$$\langle x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2}\rangle = \int_0^1 (x^2 - x + \frac{1}{4})\mathrm{d}x = \frac{1}{12}\,.$$

Tako dobimo $\mathbf{w}_3 = x^2 - \frac{1}{3} - (x - \frac{1}{2}) = x^2 - x + \frac{1}{6}$. Poiskati moramo še kvadrat norme vektorja $\mathbf{w}_3$. Le-ta je enaka

$$\langle \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_3\rangle = \int_0^1 \left(x^4 - 2x^3 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{36}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{180}\,.$$

Ortonormirana baza za $\mathbb{R}_2[x]$ je

$$\{1, \sqrt{3}(2x-1), \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)\}\,. \qquad \square$$

Definicija 2.7 Naj bo $S \subseteq V$ neprazna množica. Potem označimo

$$S^{\perp} = \{\mathbf{v} \in V\ ;\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle = 0 \text{ za vse } \mathbf{u} \in S\}\,.$$

Oznako $S^{\perp}$ preberemo 'S *ortogonalno*'. V množici $S^{\perp}$ je vsak vektor, ki je pravokoten na vse vekrorje iz S.

Trditev 2.8 *Množica $S^{\perp}$ je vektorski podprostor.*

Dokaz Naj bosta $\mathbf{v}_1$ in $\mathbf{v}_2$ iz $S^\perp$ in α_1, α_2 skalarja. Potem je

$$\langle \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2, \mathbf{u} \rangle = \alpha_1 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u} \rangle + \alpha_2 \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u} \rangle = 0$$

za vse $\mathbf{u} \in S$. Zato je $S^\perp$ vektorski podprostor. ■

Izrek 2.9 *Naj bo $U \subseteq V$ vektorski podprostor. Potem je*

$$V = U \oplus U^\perp .$$

Dokaz Pokazati moramo, da je $U \cap U^\perp = 0$ in da je $V = U + U^\perp$. Naj bo $\mathbf{u} \in U \cap U^\perp$. Potem je $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ in zato je $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Izberimo ortonormirano bazo $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ za U. Po izreku 2.4 taka baza obstaja. Naj bo $\mathbf{v}$ vektor iz V. Označimo

$$\mathbf{z} = \sum_{j=1}^{k} \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_j \rangle \mathbf{e}_j .$$

Očitno je $\mathbf{z} \in U$. Naj bo $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{z}$. Želimo pokazati, da je $\mathbf{w} \in U^\perp$. Za vsak $l = 1, 2, \ldots, k$ velja

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{w}, \mathbf{e}_l \rangle &= \left\langle \mathbf{v} - \sum_{j=1}^{k} \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_j \rangle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_l \right\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_l \rangle - \sum_{j=1}^{k} \langle \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_j \rangle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_l \rangle = \\ &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_l \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_l \rangle = 0 . \end{aligned}$$

Potem je $\langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle = 0$ za vsak $\mathbf{u} \in U$. Velja namreč $\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mathbf{e}_j$ za neke skalarje α_j in

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle = \left\langle \mathbf{w}, \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mathbf{e}_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{k} \overline{\alpha_j} \langle \mathbf{w}, \mathbf{e}_j \rangle = 0 .$$

Tako smo pokazali, da je $\mathbf{v} = \mathbf{z} + \mathbf{w} \in U + U^\perp$. ■

Definicija 2.10 Če je $U \subseteq V$ vektorski podprostor, potem vektorski podprostor $U^\perp$ imenujemo *ortogonalni komplement* za U. ◊

Zgled 2.11 V vektorskem prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ s skalarnim produktom $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) q(x)\, \mathrm{d}x$ poiščimo ortogonalni komplement vektorskega prostora $U = \mathscr{L}(1 + x)$. Iščemo take polinome $a + bx + cx^2$, da bo

$$0 = \langle 1 + x, a + bx + cx^2 \rangle =$$

$$\int_0^1 \left(a+(a+b)x+(b+c)x^2+cx^3\right)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}a+\frac{5}{6}b+\frac{5}{12}c.$$

Če pomnožimo dobljeno enačbo z 12, dobimo $18a+10b+5c=0$. Za bazo ortogonalnega komplementa $U^\perp$ izberemo, na primer, $\mathscr{B}=\left\{5-9x, x-2x^2\right\}$.$\square$

Zgled 2.12 V vektorskem prostoru $\mathbb{R}^4$ poiščimo ortonormirano bazo za ortogonalni komplement vektorskega podprostora

$$U=\mathscr{L}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\0\end{bmatrix}\right).$$

Vektor $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$ je v $U^\perp$, če je $x_1+x_2+x_4=0$ in $x_1-x_2+x_3=0$. Temu homogenemu sistemu pripada matrika $\begin{bmatrix}1&1&0&1\\1&-1&1&0\end{bmatrix}$ in njena vrstična kanonična forma je $\begin{bmatrix}1&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$. Za bazo rešitev vzemimo vektorja $\mathbf{u}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\-2\end{bmatrix}$ in $\mathbf{u}_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\1\end{bmatrix}$. Potem je $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\}$ baza za $U^\perp$. Za vektorja $\mathbf{u}_1$ in $\mathbf{u}_2$ uporabimo Gramm-Schmidtov algoritem. Dobimo $\mathbf{w}_1=\mathbf{u}_1$ in $\mathbf{w}_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\1\end{bmatrix}+\frac{3}{6}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\-2\end{bmatrix}=$ $=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\\0\end{bmatrix}$. Ortonormirana baza za $U^\perp$ je $\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\-2\end{bmatrix},\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1\\1\\2\\0\end{bmatrix}\right\}$. $\square$

Izrek 2.13 *Naj bo $\mathscr{B}=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ ortonormirana baza za V. Potem je razvoj vektorja $\mathbf{v}\in V$ po bazi $\mathscr{B}$ enak*

$$\mathbf{v}=\sum_{j=1}^n\langle\mathbf{v},\mathbf{e}_j\rangle\mathbf{e}_j\,.$$

Dokaz Naj bo $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mathbf{e}_j$ razvoj vektorja $\mathbf{v}$ po bazi $\mathscr{B}$. Potem je

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_l \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_l \right\rangle = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_l \rangle = \alpha_l$$

za $l = 1, 2, \ldots, n$. ■

Zgled 2.14 Naj bo $\mathscr{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ ortonormirana baza za $\mathbb{C}^3$ iz zgleda 2.5. Poiščimo razvoj vektorja $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ po tej bazi.

Ker je $\langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_1 \rangle = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, $\langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_2 \rangle = \frac{2}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ in $\langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_3 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}$, je

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$ □

3 Linearni funkcionali

Definicija 3.1 Linearno preslikavo $\varphi : V \to \mathbb{C}$ (ali $\mathbb{R}$) imenujemo *linearni funkcional*. ♢

Če je $\mathscr{B}$ baza V in je $\dim V = n$, potem linearnemu funkcionalu na V pripada matrika iz $\mathbb{C}^{1\times n}$, tj. vrstica.

V naslednjih zgledih bomo vedno vzeli, da je $\{1\}$ baza za $\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$.

Zgled 3.2 Naj bo $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ preslikava definirana s predpisom

$$\varphi \left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \right) = a + b - c.$$

Zlahka preverimo, da je φ linearna preslikava. V standardnih bazah za $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}$ ima φ matriko

$$\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$ □

Zgled 3.3 Naj bo $V = \mathbb{R}_3[x]$ in $\varphi : V \to \mathbb{R}$ preslikava podana s predpisom $\varphi(p) = \int_0^1 p(x)\mathrm{d}x$. φ je linearen funkcional, saj velja

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha p + \beta q) &= \int_0^1 (\alpha p(x) + \beta q(x))\mathrm{d}x = \alpha \int_0^1 p(x)\mathrm{d}x + \beta \int_0^1 q(x)\mathrm{d}x = \\ &= \alpha\varphi(p) + \beta\varphi(q)\,.\end{aligned}$$

V bazi $\{1, x, x^2, x^3\}$ za $\mathbb{R}_3[x]$ ima φ matriko

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

□

Zgled 3.4 Naj bo $V = \mathbb{C}^{n\times n}$. Preslikava $\varphi : V \to \mathbb{C}$ je podana s predpisom

$$\varphi(A) = \mathrm{sl}(A)\,.$$

Preverimo, da je φ linearen funkcional. Označimo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Potem je $\varphi(A) = \mathrm{sl}(A) = \sum_{j=1}^n a_{jj}$ in $\varphi(B) = \mathrm{sl}(B) = \sum_{j=1}^n b_{jj}$. Ker je

$$\alpha A + \beta B = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} + \beta b_{11} & \alpha a_{12} + \beta b_{12} & \dots & \alpha a_{1n} + \beta b_{1n} \\ \alpha a_{21} + \beta b_{21} & \alpha a_{22} + \beta b_{22} & \dots & \alpha a_{2n} + \beta b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{n1} + \beta b_{n1} & \alpha a_{n2} + \beta b_{n2} & \dots & \alpha a_{nn} + \beta b_{nn} \end{bmatrix},$$

je

$$\varphi(\alpha A + \beta B) = \sum_{j=1}^n (\alpha a_{jj} + \beta b_{jj}) = \alpha \sum_{j=1}^n a_{jj} + \beta \sum_{j=1}^n b_{jj} = \alpha\varphi(A) + \beta\varphi(B)\,.$$

Preslikava φ je linearen funkcional. □

Zgled 3.5 Vzemimo $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ in $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \in V$. Preverimo, da je preslikava $\varphi(A) = \mathrm{sl}(AC^\top)$ linearen funkcional in poiščimo matriko za φ v bazi

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Iz prejšnjega zgleda vemo, da je sled linearen funkcional na vektorskem prostoru V. Potem za poljubna $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in poljubna $A, B \in V$ velja

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha A + \beta B) &= \mathrm{sl}\left((\alpha A + \beta B)C^\top\right) = \mathrm{sl}(\alpha AC^\top + \beta BC^\top) = \\ &= \alpha\,\mathrm{sl}(AC^\top) + \beta\,\mathrm{sl}(BC^\top) = \alpha\varphi(A) + \beta\varphi(B)\,. \end{aligned}$$

Preslikava φ je linearna. Izračunajmo še njene vrednosti na baznih elementih:

$$\varphi\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right) = 1,\ \varphi\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right) = -1,\ \varphi\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right) = 2 \text{ in } \varphi\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right) = -3\,.$$

Matrika, ki pripada φ, je $\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & -3\end{bmatrix}$. □

Trditev 3.6 *Naj bosta $\mathbf{u}_1$ in $\mathbf{u}_2 \in V$ taka vektorja, da je*

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_2 \rangle$$

za vse $\mathbf{v} \in V$. Potem je

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2\,.$$

Dokaz Če sta $\mathbf{u}_1$ in $\mathbf{u}_2 \in V$ taka vektorja, da velja $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_2 \rangle$ za vse $\mathbf{v} \in V$, sledi $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \rangle = 0$ za vse $\mathbf{v} \in V$. Potem je tudi $\langle \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \rangle = 0$ in zato mora biti $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$, oz. $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$. ■

Izrek 3.7 (Rieszov izrek o funkcionalih) *Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom in $\varphi : V \to \mathbb{C}$ linearen funkcional. Potem v V obstaja natanko en vektor $\mathbf{u}$, za katerega velja $\varphi(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ za vse $\mathbf{v} \in V$.*

Dokaz Naj bo $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ ortonormirana baza za V. Potem za vsak $\mathbf{v} \in V$ velja $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_j \rangle \mathbf{e}_j$. Zato je

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{v}) &= \varphi\left(\sum_{j=1}^n \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_j \rangle \mathbf{e}_j\right) = \sum_{j=1}^n \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_j \rangle \varphi(\mathbf{e}_j) = \\ &= \sum_{j=1}^n \langle \mathbf{v}, \overline{\varphi(\mathbf{e}_j)}\mathbf{e}_j \rangle = \langle \mathbf{v}, \sum_{j=1}^n \overline{\varphi(\mathbf{e}_j)}\mathbf{e}_j \rangle\,. \end{aligned}$$

Označimo $\mathbf{u} = \sum_{j=1}^n \overline{\varphi(\mathbf{e}_j)}\mathbf{e}_j$ in dobimo

$$\varphi(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$$

za vse $\mathbf{v} \in V$. Po trditvi 3.6 je tak vektor $\mathbf{u}$ en sam. ■

Zgled 3.8 Na $V=\mathbb{C}^3$ je dan linearen funkcional $\varphi\left(\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\right)=b-c\mathrm{i}$. Poiščimo tak vektor $\mathbf{u}\in V$, da je $\varphi(\mathbf{v})=\langle\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle$ za vse $\mathbf{v}\in V$. Za ortonormirano bazo na V izberimo standardno bazo $\mathscr{S}$. Potem je

$$\varphi(\mathbf{e}_1)=0,\quad \varphi(\mathbf{e}_2)=1\quad\text{in}\quad \varphi(\mathbf{e}_3)=-\mathrm{i}\,.$$

Iz dokaza zgornjega izreka nato sledi, da je

$$\mathbf{u}=\sum_{j=1}^{n}\overline{\varphi(\mathbf{e}_j)}\mathbf{e}_j=\begin{bmatrix}0\\1\\\mathrm{i}\end{bmatrix}.\qquad\square$$

Zgled 3.9 Na $V=\mathbb{R}_2[x]$ je preslikava $\varphi(p)=\int_0^1 p(x)\mathrm{d}x$ linearen funkcional. V zgledu 2.6 smo pokazali, da je $\mathscr{B}=\{1,\sqrt{3}(2x-1),\sqrt{5}(6x^2-6x+1)\}$ ortonormirana baza za V. Vrednosti φ na elementih iz $\mathscr{B}$ so

$$\varphi(1)=1,\quad \varphi(\sqrt{3}(2x-1))=0\quad\text{in}\quad \varphi(\sqrt{5}(6x^2-6x+1))=0\,.$$

Polinom $q\in V$, za katerega velja $\varphi(p)=\langle p,q\rangle=\int_0^1 p(x)q(x)\mathrm{d}x$ za vse $p\in V$, je $q(x)=1$. $\square$