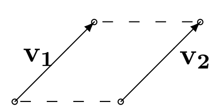
Poglavje I

Vektorji

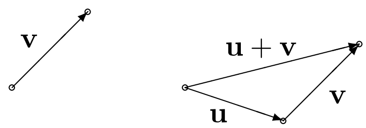
1 Seštevanje vektorjev in množenje s skalarjem

Za lažjo geometrično predstavo si najprej oglejmo, kaj so vektorji v ravnini. *Vektor* je "usmerjena daljica", ki je natanko določena s svojo začetno in končno točko:

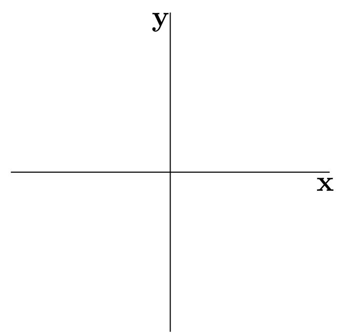
Pri tem vektor ni togo umeščen v ravnini, pač pa sta dve "usmerjen daljici" predstavljata isti vektor, če obstaja tak vzporeden premik ravnine, pri katerem gre začetna točka prve daljice v začetno točko druge in končna točka prve v končno točko drugega daljice:



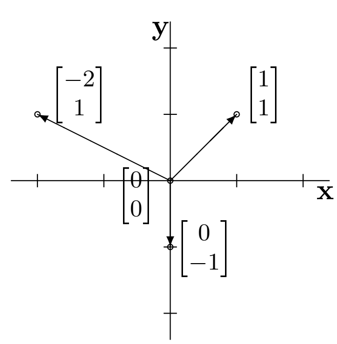
Seštevanje vektorjev: Naj bosta **u** in **v** dva vektorja v ravnini. Potem lahko z vzporednim premikom ravnine dosežemo, da začetna točka vektorja **v** in končna točka vektorja **u** sovpadata. Če je ta pogoj izpolnjen, potem vektor, katerega začetna točka je enaka začetni točki **u** in končna točka enaka končni točki **v**, imenujemo vsota vektorjev **u** in **v**:



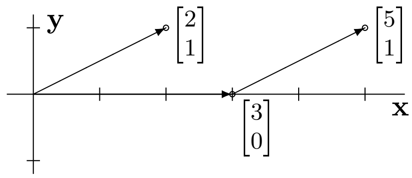
Naj bo v ravnini dan koordinatni sistem:



Potem lahko vsak vektor postavimo tako, da je njegova začetna točka v izhodišču koordinatnega sistema. Tedaj je vektor enolično določen s svojo končno točko. Zato bomo vektorje v ravnini algebraično predstavili s parom koordinat $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$, ki predstavljajo njegovo končno točko, ko je začetna točka v izhodišču. Npr.:



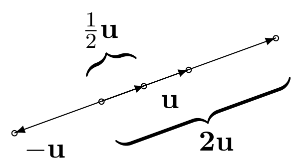
Algebraično je potem vsota dveh vektorjev $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ enaka $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$. Npr.: $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$



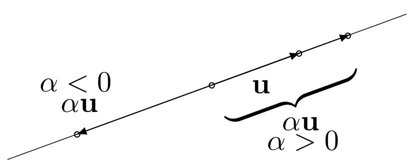
Vektor $\mathbf{u}$ lahko prištejemo tudi samemu sebi. Potem je

$$\mathbf{u}+\mathbf{u}=2\mathbf{u}, \quad \mathbf{u}+\mathbf{u}+\mathbf{u}=3\mathbf{u},$$

itd. Seveda si lahko zamislimo tudi vektor $\frac{1}{2}\mathbf{u}$, to je vektor, ki ima isto začetno točko kot $\mathbf{u}$, končna pa je razpolovišče med začetno in končno točko $\mathbf{u}$. $-\mathbf{u}$ pa je vektor, ki ga dobimo iz $\mathbf{u}$ tako, da "obrnemo smer"; to je zamenjamo začetno in končno točko $\mathbf{u}$:

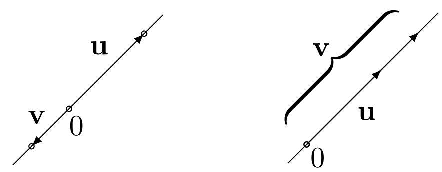


V splošnem sedaj lahko za poljubno realno število definiramo vektor $\alpha\mathbf{u}$. Začetna točka $\alpha\mathbf{u}$ naj bo enaka začetni točki $\mathbf{u}$. Njegova končna točka pa leži na premici, ki jo določata začetna in končna točka $\mathbf{u}$.



Opozorimo še na izrojeni primer, ko začetna in končna točka vektorja $\mathbf{u}$ sovpadata. Tedaj rečemo, da je $\mathbf{u}$ vektor "nič" , zapišemo $\mathbf{u}=\mathbf{0}$. Potem je $\alpha\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}$ za vse $\alpha\in\mathbb{R}$. Vektor $\mathbf{0}$ je predstavljen s parom $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$.

Naj bosta $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$ taka vektorja, da njuni začetni točki sovpadata z 0 in sta njuni končni točki na neki premici skozi začetno točko.



Potem rečemo, da **u** in **v** *kažeta v isto smer* (oziroma *imata isto smer*), če sta njuni končni točki na istem poltraku z začetno točko 0 in rečemo, da **u** in **v** *kažeta v nasprotno smer*, če sta njuni končni točki na različnih poltrakih z začetno točko 0.

Podobno kot v ravnini definiramo vektorje tudi v tri in več razsežnem prostoru. Spet v prostor vpeljemo koordinatni sistem in vektor, ki ima začetno točko v izhodišču predstavimo z njegovo končno točko, ki je podana z n-terico števil $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. Množico vseh vektorjev v n-razsežnem prostoru označimo z $\mathbb{R}^n$. V prvem poglavju bomo največkrat srečali $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$.

Na vektorjih definiramo dve operaciji.

Seštevanje vektorjev:

- algebraično: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$

- geometrično pa seštevanje predstavimo enako kot v ravnini.

Množenje vektorja s skalarjem: Števila iz $\mathbb{R}$ imenujemo *skalarji*, kadar z njimi množimo vektorje:

- algebraično: $\alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}$.

- geometrično pa je pomen množenja vektorja spet enak kot v ravnini.

Vektor $\mathbf{0}$ je predstavljen z n-terico $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

Preden si ogledamo algebraične lastnosti obeh operacij, ki smo ju doslej spoznali na vektorjih, na kratko ponovimo lastnosti, ki veljajo za seštevanje in množenje realnih števil:

- asociativnost seštevanja: $(a+b)+c = a+(b+c)$ za poljubne a, b, $c \in \mathbb{R}$,
- enota za seštevanje: $a + 0 = a = 0 + a$ za vse $a \in \mathbb{R}$,
- inverz za seštevanje: $a + (-a) = 0 = (-a) + a$ za vsak $a \in \mathbb{R}$,
- komutativnost seštevanja: $a + b = b + a$ za poljubna a, $b \in \mathbb{R}$,
- asociativnost množenja: $(ab)c = a(bc)$ za poljubne a, b, $c \in \mathbb{R}$,
- enota za množenje: $1 \cdot a = a = a \cdot 1$ za vse $a \in \mathbb{R}$,
- inverz za množenje: $a \cdot \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \cdot a$ za vse $a \neq 0$, 0 nima inverza za množenje,
- komutativnost množenja: $ab = ba$ za poljubna a, $b \in \mathbb{R}$,
- distributivnost seštevanja in množenja:

$$\begin{aligned} (a+b)c &= ac + bc \\ a(b+c) &= ab + ac \text{za poljubne } a,\ b,\ c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Iz lastnosti seštevanja in množenja realnih števil izpeljemo naslednje lastnosti operacij na vektorjih:

- asociativnost seštevanja: $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ za poljubne $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$,
- enota za seštevanje: $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$ za vsak $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$,
- inverz za seštevanje: $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0} = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u}$ za vsak $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$,
- komutativnost seštevanja: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ za poljubna $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$,
- distributivnost seštevanja vektorjev in množenja s skalarjem: $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$ za vsak $\alpha \in \mathbb{R}$ in poljubna $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$,
- distributivnost seštevanja skalarjev in množenja vektorja s skalarjem : $(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$ za poljubna α, $\beta \in \mathbb{R}$ in poljuben $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$,
- množenje s skalarjem 1: $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$ za vse $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$,

- množenje s skalarjem 0: $0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$ za vse $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$,
- dodatno velja še: $\alpha(\beta\mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u}$ za poljubna α, $\beta \in \mathbb{R}$ in poljuben $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$.

Vseh lastnosti ne bomo podrobno dokazovali. Za zgled poglejmo, kako dokažemo distributivnost vsote vektorjev za množenje s skalarjem v $\mathbb{R}^3$.

Naj bosta $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ vektorja ter $\alpha \in \mathbb{R}$ skalar. Potem je

$$\alpha(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \alpha \begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(x_1+y_1) \\ \alpha(x_2+y_2) \\ \alpha(x_3+y_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1+\alpha y_1 \\ \alpha x_2+\alpha y_2 \\ \alpha x_3+\alpha y_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha y_1 \\ \alpha y_2 \\ \alpha y_3 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}.$$

Ostale lastnosti naj poskusi bralec izpeljati za vajo.

2 Skalarni produkt vektorjev

Definicija 2.1 Naj bosta $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ in $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ vektorja v $\mathbb{R}^n$. *Skalarni produkt* $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$ je število $x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$. Oznaka za skalarni produkt je $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$. $\diamondsuit$

Zgled 2.2 Za vektorja $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ izračunajmo:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2 - 1 = 1,\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 4 + 1 = 5 \text{ in } \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 1 + 1 = 2.$$

Naredimo še en zgled v $\mathbb{R}^4$: $\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle = 2 - 1 + 0 + 8 = 9.$ $\square$

Algebraične lastnosti skalarnega produkta.

1.) aditivnost: $\langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ za poljubne $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$,

2.) homogenost: $\langle \alpha\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \alpha\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$ za vse $\alpha \in \mathbb{R}$ in $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$,

3.) simetričnost: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle$ za vse $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Predno bomo dokazali zgoraj naštete lastnosti, vpeljimo še novo oznako. Vsoto n števil $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ zapišemo krajše s simbolom $\sum_{i=1}^{n} a_i$. $\sum$ je velika tiskana grška črka sigma. Tako je npr.:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n),$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} = a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{mj}.$$

Dokaz Naj bodo $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$,$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$ vektorji v $\mathbb{R}^n$ in $\alpha \in \mathbb{R}$.

Potem velja:

1.) $$\langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)z_i = \sum_{i=1}^{n}(x_i z_i + y_i z_i) = = \sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \sum_{i=1}^{n} y_i z_i = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle.$$

2.) $$\langle \alpha\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i)y_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha(x_i y_i) = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \alpha\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle .$$

3.) $$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle.$$ ■

Posledica 2.3 *Za poljubne vektorje* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ *in poljuben skalar* $\alpha \in \mathbb{R}$ *velja tudi*

4.) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}+\mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle$,

5.) $\langle \mathbf{u}, \alpha\mathbf{v}\rangle = \alpha\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$.

Dokaz Ti dve lastnosti sledita iz prvih treh.
Zaporedoma uporabimo lastnosti **3.)**, **1.)** in ponovno **3.)** ter dobimo

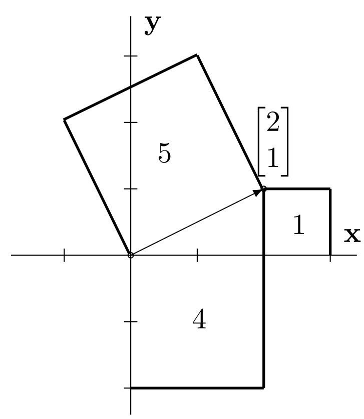
4.) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}+\mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}+\mathbf{w}, \mathbf{u}\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{u}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle\,.$

Če zaporedoma uporabimo lastnosti **3.)**, **2.)** in ponovno **3.)**, pokažemo še
5.) $\langle \mathbf{u}, \alpha\mathbf{v}\rangle = \langle \alpha\mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle = \alpha\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle = \alpha\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$. ■

Geometrični pomen skalarnega produkta.
Najprej vzemimo vektor $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Potem je

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = x^2 + y^2\,.$$

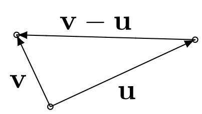
Če je $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, je $\left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 4 + 1 = 5$. Narišimo še sliko:

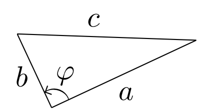


Pitagorov izrek nam pove, da je 5 ploščina kvadrata nad hipotenuzo pravokotnega trikotnika s stranicama 2 in 1. Potem je $\sqrt{5}$ razdalja med začetno in končno točko vektorja u, oziroma dolžina vektorja u.

Splošno za $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ je $\sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle} = \sqrt{x^2 + y^2}$ *dolžina* vektorja $\mathbf{u}$. Označimo $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle}$. Dolžino vektorja $\mathbf{u}$ imenujemo tudi *norma vektorja* $\mathbf{u}$.

Naj bosta $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ dva vektorja v $\mathbb{R}^2$. Potem je $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ vektor, katerega začetna točka je enaka končni točki vektorja $\mathbf{u}$ in končna točka je enaka končni točki vektorja $\mathbf{v}$.





Spomnimo se kosinusnega izreka za trikotnik, ki pravi $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi$, kjer so a, b, c dolžine stranic trikotnika ter φ kot med stranicama a in b. Uporabimo kosinusni izrek za trikotnik s stranicami $\|\mathbf{u}\|$, $\|\mathbf{v}\|$ in $\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|$:

$$\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\varphi$$

oziroma

$$\langle \mathbf{v}-\mathbf{u}, \mathbf{v}-\mathbf{u}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\varphi\,. \tag{I.2}$$

Pri tem je φ kot med vektorjema $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$. S pomočjo lastnosti za skalarni produkt dobimo:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{v}-\mathbf{u}, \mathbf{v}-\mathbf{u}\rangle &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}-\mathbf{u}\rangle + \langle -\mathbf{u}, \mathbf{v}-\mathbf{u}\rangle = \\
&= \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{v}, -\mathbf{u}\rangle + \langle -\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \langle -\mathbf{u}, -\mathbf{u}\rangle = \\
&= \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = \\
&= \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle\,.
\end{aligned}$$

Iz enakosti (I.2) sledi

$$-2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = -2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\varphi.$$

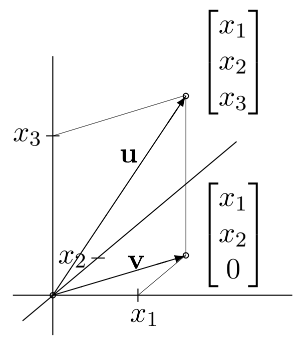
Od tod dobimo pomembno zvezo, ki nam pove geometrični pomen skalarnega produkta.

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\varphi\,. \tag{I.3}$$

Geometrični pomen skalarnega produkta v $\mathbb{R}^n$ za $n \geq 3$ ni prav nič drugačen kot v $\mathbb{R}^2$. Za vektor $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ iz $\mathbb{R}^n$ definiramo

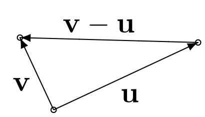
$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Tudi tu je $\|\mathbf{u}\|$ enaka dolžini vektorja $\mathbf{u}$. V $\mathbb{R}^3$ je naprimer $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.



Opazimo, da je dolžina vektorja $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$ enaka $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ in da je dolžina vektorja $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ enaka $\sqrt{\|\mathbf{v}\|^2 + x_3^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Podobno velja tudi v višjih dimenzijah.

Ponovno uporabimo trikotnik, ki ga določata vektorja $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$, ki ju postavimo tako, da imata isto začetno točko:



Potem ta točka skupaj s končnima točkama določa neko ravnino v $\mathbb{R}^n$. (Če je trikotnik izrojen, to je, $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$ imata isto ali nasprotno smer, potem vzamemo neko ravnino, ki vsebuje začetno in končni točki $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$.) Sedaj lahko uporabimo kosinusni izrek v tej ravnini in spet računamo enako kot v $\mathbb{R}^2$. Tako smo pokazali naslednji izrek:

Izrek 2.4 *Naj bosta* $\mathbf{u}$ *in* $\mathbf{v}$ *vektorja v* $\mathbb{R}^n$*. Potem velja*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos\varphi, \text{ \textit{kjer je} } \varphi \text{ \textit{kot med vektorjema} } \mathbf{u} \text{ \textit{in} } \mathbf{v}.$$

Opomba 2.5 Kot φ vedno izberemo z intervala $[0, \pi]$ (merjeno v radianih - kar je v stopinjah med $0°$ in $180°$). ♢

Zgled 2.6 Poiščimo razdaljo med točkama $\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$ v $\mathbb{R}^4$. Naj bosta to končni točki vektorjev $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$, katerih začetna točka je izhodišče koordinatnega sistema. Velja: $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ in $\langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle = 16 + 4 = 20$. Potem je $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = 2\sqrt{5}$, kar je tudi razdalja med danima točkama. □

Zgled 2.7 Poiščimo kot med vektorjema $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Izračunajmo:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|^2 &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 4 + 4 + 1 = 9 \\ \|\mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 9 + 16 = 25 \\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= -6 - 4 = -10\,. \end{aligned}$$

Potem je $\cos\varphi = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{-10}{3 \cdot 5} = -\frac{2}{3}$. Od tod dobimo, da je kot med vektorjema $\varphi \doteq 2,3rd \doteq 131,8°$. □

Opazimo, da je $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Potem je $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ natanko tedaj, ko je $\mathbf{u} = 0$. Edini vektor z dolžino 0 je vektor $\mathbf{0}$. Poglejmo si izraz za skalarni produkt $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos\varphi$ natančneje. Za funkcijo $\cos\varphi$ velja, da je $\cos\varphi = 0$ natanko tedaj, ko je $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Če sta $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$ oba neničelna vektorja, potem je $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ natanko tedaj, ko je $\cos\varphi = 0$. Tako smo pokazali naslednjo trditev:

Trditev 2.8 *Vektorja* $\mathbf{u}$ *in* $\mathbf{v}$ *sta pravokotna natanko tedaj, ko je* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

Opomba 2.9 Tu smo privzeli, da je vektor $\mathbf{0}$ pravokoten na vsak drug vektor. ◊

Zgled 2.10 Preverimo, ali sta vektorja $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ pravokotna. Kaj pa vektorja $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$? Ker je

$$\left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle = -3 + 2 + 1 = 0,$$

sta vektorja $\mathbf{u}_1$ in $\mathbf{u}_2$ pravokotna. Ker je

$$\left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle = 2 - 1 = 1 \neq 0,$$

vektorja $\mathbf{v}_1$ in $\mathbf{v}_2$ nista pravokotna. □

Za funkcijo $\cos\varphi$ na intervalu $[0, \pi]$ velja, da je $\cos\varphi = 1$ natanko tedaj, ko je $\varphi = 0$ in $\cos\varphi = -1$ natanko tedaj, ko je $\varphi = \pi$. Tako smo pokazali še naslednjo trditev.

Trditev 2.11 *Naj bosta* $\mathbf{u}$ *in* $\mathbf{v}$ *oba neničelna vektorja in* φ *kot med njima. Potem je* $\cos\varphi = 1$ *natanko tedaj, ko* $\mathbf{u}$ *in* $\mathbf{v}$ *kažeta v isto smer, in* $\cos\varphi = -1$ *natanko tedaj, ko* $\mathbf{u}$ *in* $\mathbf{v}$ *kažeta v nasprotno smer.*

Vemo, da je zaloga vrednosti funkcije $\cos\varphi$ interval $[-1, 1]$. Potem je $0 \leq |\cos\varphi| \leq 1$. Iz izreka 2.4 dobimo naslednji izrek:

Izrek 2.12 (Cauchy-Schwarzeva neenakost) *Za poljubna vektorja* $\mathbf{u}$ *in* $\mathbf{v}$ *iz* $\mathbb{R}^n$ *velja*

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{u}\|. \tag{I.4}$$

Enakost v tej neenakosti velja natanko tedaj, ko bodisi $\mathbf{u}$ *in* $\mathbf{v}$ *kažeta v isto smer, bodisi* $\mathbf{u}$ *in* $\mathbf{v}$ *kažeta v nasprotno smer.*

Opomba 2.13 Pri tem smo privzeli, da vektor "nič" kaže v vse smeri. ◊

Zgled 2.14 Naj bosta $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \end{bmatrix}$. Potem je $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -7 + 3 = -4$, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 1 + 9 = 10$ in $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 49 + 1 = 50$. Tako dobimo

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| = 4 < \sqrt{10} \cdot \sqrt{50} = 10 \cdot \sqrt{5} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|.$$

Za vektorja $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ velja $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -4$, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 2$ in $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 8$. Potem je

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| = 4 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|.$$

Ker je $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -4 = -\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$, vektorja $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$ kažeta v nasprotno smer. □

Oglejmo si še nekaj izrekov, ki jih dobimo iz lastnosti skalarnega produkta.

Izrek 2.15 (Pitagorov izrek) *Naj bosta* $\mathbf{u}$ *in* $\mathbf{v}$ *pravokotna vektorja iz* $\mathbb{R}^n$*. Potem je*

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 .$$

Dokaz Poračunajmo:

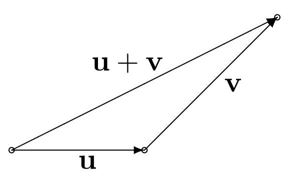
$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}+\mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}\rangle = \\
&= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = \\
&= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle .
\end{aligned}$$

Ker sta $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$ pravokotna, je $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 0$. Zato je

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 . \qquad \blacksquare$$

Izrek 2.16 (trikotniška neenakost) *Za poljubna* $\mathbf{u}$ *in* $\mathbf{v}$ *iz* $\mathbb{R}^n$ *velja*

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| .$$



Dokaz Račun iz prejšnjega dokaza in enakost (2.4) nam dasta

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = \\
&= \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\varphi + \|\mathbf{v}\|^2 \leq \\
&\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 = (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2 .
\end{aligned}$$

Neenakost sledi iz dejstva, da je $\cos\varphi \leq 1$. Potem dobimo

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|,$$

saj je norma vektorja vselej nenegativno število. $\blacksquare$

Norma $\|\mathbf{u}\|$ vektorja $\mathbf{u}$ tako zadošča naslednjim lastnostim:

1.) $\|\alpha\mathbf{u}\| = |\alpha|\|\mathbf{u}\|$ za vse $\alpha \in \mathbb{R}$ in $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$,

2.) $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ za vse $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$,

3.) $\|\mathbf{u}\| \geq 0$ za vse $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ in $\|\mathbf{u}\| = 0$ natanko tedaj, ko je $\mathbf{u} = 0$.

Lastnosti **2.)** in **3.)** smo že pokazali. Preverimo še lastnost **1.)**:

$$\|\alpha\mathbf{u}\|^2 = \langle \alpha\mathbf{u}, \alpha\mathbf{u}\rangle = \alpha^2\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = \alpha^2\|\mathbf{u}\|^2 .$$

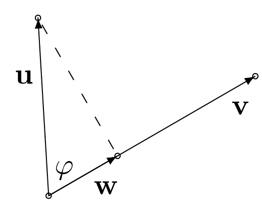
Ko korenimo obe strani, moramo upoštevati, da je $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$.

Definicija 2.17 Vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, za katerega velja $\|\mathbf{u}\| = 1$, imenujemo *enotski vektor.* ♢

Naj bo $\mathbf{u} \neq 0$. Potem je $\frac{1}{\|\mathbf{u}\|}\mathbf{u}$ enotski vektor. Velja namreč

$$\left\langle \frac{1}{\|\mathbf{u}\|}\mathbf{u}, \frac{1}{\|\mathbf{u}\|}\mathbf{u} \right\rangle = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|^2}\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|^2}\|\mathbf{u}\|^2 = 1 .$$

Naj bosta $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$ neničelna vektorja. Izberemo ju tako, da imata isto začetno točko. Radi bi poiskali pravokotno projekcijo vektorja $\mathbf{u}$ na premico, ki jo določa vektor $\mathbf{v}$, to je premico, ki je določena z začetno in končno točko vektorja $\mathbf{v}$.



Dolžina te pravokotne projekcije je enaka $\|\mathbf{u}\| \cdot \cos\varphi$. Vektor $\mathbf{w}$, ki je projekcija vektorja $\mathbf{u}$, je potem enak

$$\mathbf{w} = \|\mathbf{u}\| \cos\varphi \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v} = \frac{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos\varphi}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle}\mathbf{v} .$$

Tako smo pokazali prvi del naslednje trditve.

Trditev 2.18 *Naj bosta* $\mathbf{u}$ *in* $\mathbf{v}$ *neničelna vektorja. Potem je* $\mathbf{w} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle}\mathbf{v}$ *pravokotna projekcija vektorja* $\mathbf{u}$ *na smer vektorja* $\mathbf{v}$*. Vektorja* $\mathbf{u} - \mathbf{w}$ *in* $\mathbf{v}$ *sta pravokotna.*

Dokažimo še drugi del te trditve:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u} - \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle &= \left\langle \mathbf{u} - \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle}\mathbf{v}, \mathbf{v} \right\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \left\langle -\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle}\mathbf{v}, \mathbf{v} \right\rangle = \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle - \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle}\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 0 . \end{aligned}$$

Zgled 2.19 Dana sta vektorja $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$. Poiščimo pravokotno projekcijo $\mathbf{u}$ na $\mathbf{v}$. Ta je enaka $\mathbf{w} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \mathbf{v} = \frac{2}{20} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Poiščimo še pravokotno projekcijo vektorja $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ na smer vektorja $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Le-ta je enaka $\mathbf{w} = \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. □

Zgleda kažeta, da ima lahko pravokotna projekcija $\mathbf{w}$ isto smer kot vektor $\mathbf{v}$ (prvi primer v zgledu 2.19) ali pa nasprotno smer kot vektor $\mathbf{v}$ (drugi primer v zgledu 2.19). Smer je odvisna od predznaka skalarnega produkta $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, natančneje od $\cos\varphi$, kjer je φ kot med vektorjema. Če je $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, potem $\mathbf{v}$ in $\mathbf{w}$ kažeta v isto smer, če pa je $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$, pa $\mathbf{v}$ in $\mathbf{w}$ kažeta v nasprotno smer.

3 Vektorski in mešani produkt v $\mathbb{R}^3$

Definicija 3.1 Naj bosta $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ dva vektorja v $\mathbb{R}^3$. Potem vektor

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{bmatrix}$$

imenujemo *vektorski produkt* vektorjev $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$. ◊

Zgled 3.2 Poiščimo vektorski produkt vektorjev $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$ □

Algebraične lastnosti vektorskega produkta.

1.) aditivnost:

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}+\mathbf{v})\times\mathbf{w} &= \mathbf{u}\times\mathbf{v}+\mathbf{v}\times\mathbf{w} \quad \text{in}\\ \mathbf{u}\times(\mathbf{v}+\mathbf{w}) &= \mathbf{u}\times\mathbf{v}+\mathbf{u}\times\mathbf{w} \quad \text{za vse } \mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w}\in\mathbb{R}^3,\end{aligned}$$

2.) homogenost: $(\alpha\mathbf{u})\times\mathbf{v}=\alpha(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=\mathbf{u}\times(\alpha\mathbf{v})$ za vse $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$ in $\alpha\in\mathbb{R}$,

3.) antikomutativnost: $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=-\mathbf{v}\times\mathbf{u}$ za vse $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$.

Dokažimo najprej antikomutativnost:
Za $\mathbf{u}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ in $\mathbf{v}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$ je $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\begin{bmatrix}x_2y_3-x_3y_2\\x_3y_1-x_1y_3\\x_1y_2-x_2y_1\end{bmatrix}$ in $\mathbf{v}\times\mathbf{u}=\begin{bmatrix}y_2x_3-y_3x_2\\y_3x_1-y_1x_3\\y_1x_2-y_2x_1\end{bmatrix}$.
Opazimo, da je $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=-\mathbf{v}\times\mathbf{u}$.

Za dokaz homogenosti izberimo še $\alpha\in\mathbb{R}$. Potem je

$$(\alpha\mathbf{u})\times\mathbf{v}=\begin{bmatrix}\alpha x_2y_3-\alpha x_3y_2\\\alpha x_3y_1-\alpha x_1y_3\\\alpha x_1y_2-\alpha x_2y_1\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}x_2y_3-x_3y_2\\x_3y_1-x_1y_3\\x_1y_2-x_2y_1\end{bmatrix}=\alpha(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\,.$$

Z uporabo antikomutativnosti dobimo še

$$\mathbf{u}\times(\alpha\mathbf{v})=-(\alpha\mathbf{v})\times\mathbf{u}=-\alpha(\mathbf{v}\times\mathbf{u})=\alpha(-(\mathbf{v}\times\mathbf{u}))=\alpha\mathbf{u}\times\mathbf{v}\,.$$

Aditivnosti naj bralec dokaže za vajo.

Iz doslej dokazanih lastnosti takoj sledita še dve:

4.) $\mathbf{u}\times\mathbf{u}=\mathbf{0}$ za vse $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^3$,

5.) $\mathbf{u}\times\mathbf{0}=\mathbf{0}$ za vse $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^3$.

Lastnost **4.)** sledi iz antikomutativnosti. Velja namreč $\mathbf{u}\times\mathbf{u}=-\mathbf{u}\times\mathbf{u}$ in nato $2(\mathbf{u}\times\mathbf{u})=\mathbf{0}$. Če pomnožimo obe strani z $\frac{1}{2}$, dobimo $\mathbf{u}\times\mathbf{u}=\mathbf{0}$.

Enakost $\mathbf{u}\times\mathbf{0}=\mathbf{0}$ pa zlahka preverimo kar s pomočjo definicije vektorskega produkta.

6.) Linearnost: $(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v})\times\mathbf{w}=\alpha(\mathbf{u}\times\mathbf{w})+\beta(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$ za vse $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}\in\mathbb{R}^3$ in α, $\beta\in\mathbb{R}$.

Za dokaz linearnosti uporabimo aditivnost in homogenost. Tako dobimo

$$(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v})\times\mathbf{w}=(\alpha\mathbf{u})\times\mathbf{w}+(\beta\mathbf{v})\times\mathbf{w}=\alpha(\mathbf{u}\times\mathbf{w})+\beta(\mathbf{v}\times\mathbf{w})\,.$$

7.) Formula o dvakratnem vektorskem produktu:

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w} = \langle\mathbf{u},\mathbf{w}\rangle\mathbf{v} - \langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle\mathbf{u} \quad \text{za poljubne } \mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w}\in\mathbb{R}^3.$$

Za dokaz te formule pišimo še $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$. Potem je

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w} &= \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} x_3y_1z_3 - x_1y_3z_3 - x_1y_2z_2 + x_2y_1z_2 \\ x_1y_2z_1 - x_2y_1z_1 - x_2y_3z_3 + x_3y_2z_3 \\ x_2y_3z_2 - x_3y_2z_2 - x_3y_1z_1 + x_1y_3z_1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{I.5}$$

in

$$\begin{aligned}
&\langle\mathbf{u},\mathbf{w}\rangle\mathbf{v} - \langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle\mathbf{u} = \\
= &\begin{bmatrix} x_1z_1y_1 + x_2z_2y_1 + x_3z_3y_1 - y_1z_1x_1 - y_2z_2x_1 - y_3z_3x_1 \\ x_1z_1y_2 + x_2z_2y_2 + x_3z_3y_2 - y_1z_1x_2 - y_2z_2x_2 - y_3z_3x_2 \\ x_1z_1y_3 + x_2z_2y_3 + x_3z_3y_3 - y_1z_1x_3 - y_2z_2x_3 - y_3z_3x_3 \end{bmatrix} = \\
= &\begin{bmatrix} x_2z_2y_1 + x_3z_3y_1 - y_2z_2x_1 - y_3z_3x_1 \\ x_1z_1y_2 + x_3z_3y_2 - y_1z_1x_2 - y_3z_3x_2 \\ x_1z_1y_3 + x_2z_2y_3 - y_1z_1x_3 - y_2z_2x_3 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{I.6}$$

Preverimo še, da sta vektorja (I.5) in (I.6) enaka in s tem je dokaz formule o dvakratnem vektorskem produktu končan.

Definicija 3.3 Naj bodo $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ in $\mathbf{w}$ elementi $\mathbb{R}^3$. Potem število $\langle\mathbf{u}\times\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle$ imenujemo *mešani produkt* vektorjev $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$. $\Diamond$

Postopek za izračun mešanega produkta.

Naj bo $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$. Potem postavimo vektorja zaporedoma v stolpce in prva dva ponovimo:

$$\begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 & x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & x_3 & y_3 \end{matrix}$$

Mešani produkt potem dobimo tako, da seštejemo tri diagonalne produkte $x_1y_2z_3 + y_1z_2x_3 + z_1x_2y_3$ in jim odštejemo tri antidiagonalne produkte $-z_1y_2x_3 - x_1z_2y_3 - y_1x_2z_3$.
Res to zlahka preverimo. Velja

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u}\times\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \right\rangle = \\ = x_2y_3z_1 - x_3y_2z_1 + x_3y_1z_2 - x_1y_3z_2 + x_1y_2z_3 - x_2y_1z_3\,. \qquad \text{(I.7)}\end{aligned}$$

Zgled 3.4 Izračunajmo mešani produkt vektorjev $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$:

$$\langle \mathbf{u}\times\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle = 0 + 0 + 4 - (0 + 24 - 2) = -18\,. \qquad \square$$

Algebraične lastnosti mešanega produkta.

8.) $\langle \mathbf{u}\times\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{u},\mathbf{v}\times\mathbf{w}\rangle$ za poljubne $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$.

Res:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\times\mathbf{w}\rangle &= \left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_2z_3 - y_3z_2 \\ y_3z_1 - y_1z_3 \\ y_1z_2 - y_2z_1 \end{bmatrix} \right\rangle = \\ &= x_1y_2z_3 - x_1y_3z_2 + x_2y_3z_1 - x_2y_1z_3 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1\,.\end{aligned}$$

Če ta izraz primerjamo z (I.7), dobimo enakost $\langle \mathbf{u}\times\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{u},\mathbf{v}\times\mathbf{w}\rangle$.

9.) $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - \langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle^2$ za poljubna $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

Za dokaz te lastnosti uporabimo najprej lastnost **8.)** mešanega produkta:

$$\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u}\times\mathbf{v},\mathbf{u}\times\mathbf{v}\rangle = \langle (\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle\,.$$

Potem nam formula o dvakratnem vektorskem produktu da

$$\langle (\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \langle \langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle\mathbf{v} - \langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle\ .$$

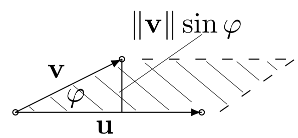
Iz linearnosti skalarnega produkta sledi, da je ta izraz enak

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle .$$

V zadnjem koraku smo uporabili še simetričnost skalarnega produkta.

S pomočjo formule **9.)** dobimo geometrični pomen dolžine vektorskega produkta $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

Trditev 3.5 *Dolžina vektorskega produkta* $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$ *je enaka ploščini paralelograma, ki ga določata* $\mathbf{u}$ *in* $\mathbf{v}$*.*



Dokaz Naj bo φ kot med vektorjema $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$. Formula **9.)** nam pove, da je

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 .$$

Spomnimo se še pomena skalarnega produkta iz izreka 2.4. Potem je

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \cos^2\varphi = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 (1 - \cos^2\varphi) = \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \sin^2\varphi \end{aligned}$$

in zato

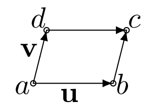
$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin\varphi .$$

Tu lahko pišemo $\sin\varphi$ namesto $|\sin\varphi|$, saj smo izbrali $\varphi \in [0, \pi]$. V trikotniku, ki ga določata vektorja $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$, je dolžina višine na nosilko vektorja $\mathbf{u}$ enaka $\|\mathbf{v}\| \sin\varphi$ in zato je ploščina paralelograma določenega z $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$ enaka $\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin\varphi = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$. ■

Zgled 3.6 Poiščimo ploščino paralelograma z oglišči $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$. Označimo

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ in } \mathbf{d} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} .$$

Ker je $\mathbf{b}-\mathbf{a}=\mathbf{c}-\mathbf{d}=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}$ in $\mathbf{d}-\mathbf{a}=\mathbf{c}-\mathbf{b}=\begin{bmatrix}-2\\2\\1\end{bmatrix}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ in $\mathbf{d}$ res določajo paralelogram. Naj bo $\mathbf{u}=\mathbf{b}-\mathbf{a}$ in $\mathbf{v}=\mathbf{d}-\mathbf{a}$.



Potem je

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}.$$

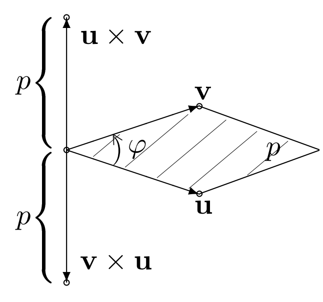
Norma vektorja $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ je $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|=\sqrt{9}=3$, kar je tudi ploščina paralelograma.$\square$

Trditev 3.7 *Vektorski produkt* $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ *je pravokoten na oba faktorja* $\mathbf{u}$ *in* $\mathbf{v}$.

Dokaz Velja $\langle\mathbf{u}\times\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle=\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\times\mathbf{v}\rangle=\langle\mathbf{u},\mathbf{0}\rangle=0$
in $\langle\mathbf{u}\times\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle=\langle-\mathbf{v}\times\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle=-\langle\mathbf{v}\times\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle=-\langle\mathbf{v},\mathbf{u}\times\mathbf{u}\rangle=$
$=-\langle\mathbf{v},\mathbf{0}\rangle=0.$ ■

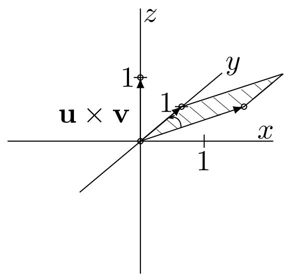
Geometrični pomen vektorskega produkta:

Če $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$ kažeta v isto ali nasprotno smer, potem je $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{0}$. Tedaj je namreč paralelogram, ki ga določata, izrojen in je njegova ploščina enaka 0. Predpostavimo sedaj, da $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$ ne kažeta niti v isto niti v nasprotno smer. Potem je paralelogram, ki ga določata $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$ neizrojen, ima torej pozitivno ploščino. Tedaj je dolžina $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|$ enaka ploščini paralelograma. To ploščino označimo s p. Vektor $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ je pravokoten na $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$, zato geometrijsko za $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ ostaneta samo dve možnosti. Končna točka vektorja $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ leži na premici pravokotni na $\mathbf{u}$ in na $\mathbf{v}$ in je od začetne točke $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$ oddaljena za p.



Izkaže se, da je smer $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ določena s *pravilom desnega vijaka.* Če zavrtimo $\mathbf{u}$ proti $\mathbf{v}$ (po krajši poti), potem je smer $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ enaka smeri pomika vijaka z običajnim (desnim) navojem. Poglejmo si, kaj to pomeni v konkretnem zgledu.

Zgled 3.8 Naj bo $\mathbf{u} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ in $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$. Potem je $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$.

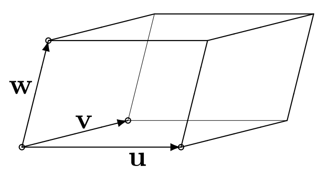


□

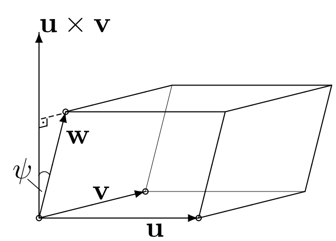
Geometrični pomen mešanega produkta:

Trditev 3.9 *Absolutna vrednost* $|\langle \mathbf{u}\times\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle|$ *mešanega produkta vektorjev* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *in* $\mathbf{w}$ *je enaka volumnu paralelepipeda, ki ga določajo vektorji* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *in* $\mathbf{w}$.

Paralelepiped je telo v $\mathbb{R}^3$, katerega oglišča so 0, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, $\mathbf{u}+\mathbf{w}$, $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ in $\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}$. Stranske ploskve paralelepipeda so paralelogrami, ki so paroma med seboj paralelni (vzporedni).



Dokaz Naj bo ψ kot med vektorjema $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ in $\mathbf{w}$. Potem je $\langle \mathbf{u}\times\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle =$
$= \|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|\cos\psi$.



Opazimo, da je $\|\mathbf{w}\||\cos\psi|$ ravno dolžina pravokotne projekcije vektorja $\mathbf{w}$ na smer vektorja $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$. Zato je to ravno razdalja med spodnjo in zgornjo stransko ploskvijo paralelepipeda. Volumen paralelepipeda je potem enak produktu ploščine osnovne ploskve z omenjeno razdaljo, torej je enak

$$\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\||\cos\psi| = |\langle \mathbf{u}\times\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle|\,.$$ ■

Zgled 3.10 Poiščimo volumen paralelepipeda določenega z vektorji $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$. Mešani produkt teh vektorjev je

$$\langle \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0 + 0 + (-4) - (0 + 24 + 2) = -30\,.$$

Volumen paralelepipeda je potem enak 30. □

Produkti, ki smo jih srečali doslej pri matematiki, so bili (večinoma) asociativni: $(ab)c = a(bc)$. Vektorski produkt nima te lastnosti. Iz formule za dvakratni vektorski produkt dobimo

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \mathbf{v} - \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \mathbf{u}$$

in

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = -(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \times \mathbf{u} = -\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \mathbf{w} + \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle \mathbf{v}\,.$$

Vidimo, da je

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \quad \text{natanko tedaj, ko je} \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \mathbf{u} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \mathbf{w}\,.$$

To pa seveda v splošnem ni res. To je res na primer, če je $\mathbf{v}$ pravokoten na oba vektorja $\mathbf{u}$ in $\mathbf{w}$, ali pa če $\mathbf{u}$ in $\mathbf{w}$ kažeta v isto ali nasprotno smer. Bralec naj ta dejstva preveri sam.

Zgled 3.11 Vektorski produkt ni asociativen. Naj bodo $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Potem je

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} &= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \text{in} \\ \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Torej je $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} \neq \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$. □

Za konec pokažimo še nekaj algebraičnih lastnosti vektorskega in mešanega produkta:

10.) Lagrangeova identiteta: $\langle \mathbf{u}\times\mathbf{v}, \mathbf{w}\times\mathbf{z}\rangle = \langle \mathbf{u},\mathbf{w}\rangle\langle \mathbf{v},\mathbf{z}\rangle - \langle \mathbf{u},\mathbf{z}\rangle\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle$ za poljubne $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{z}\in\mathbb{R}^3$.

11.) Jacobijeva identiteta: $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w} + (\mathbf{v}\times\mathbf{w})\times\mathbf{u} + (\mathbf{w}\times\mathbf{u})\times\mathbf{v} = \mathbf{0}$ za poljubne $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}\in\mathbb{R}^3$.

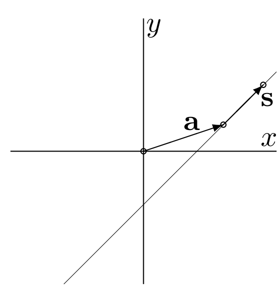
Za dokaz Lagrangeove identitete uporabimo lastnosti **8.)** in **7.)**:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u}\times\mathbf{v}, \mathbf{w}\times\mathbf{z}\rangle &= \langle (\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}, \mathbf{z}\rangle = \langle \langle \mathbf{u},\mathbf{w}\rangle\mathbf{v} - \langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle\mathbf{u}, \mathbf{z}\rangle = \\ &= \langle \mathbf{u},\mathbf{w}\rangle\langle \mathbf{v},\mathbf{z}\rangle - \langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle\langle \mathbf{u},\mathbf{z}\rangle\,.\end{aligned}$$

Za dokaz Jacobijeve identitete pa uporabimo formulo o dvakratnem vektorskem produktu:

$$\begin{aligned}&(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w} + (\mathbf{v}\times\mathbf{w})\times\mathbf{u} + (\mathbf{w}\times\mathbf{u})\times\mathbf{v} = \\ = \;& \langle \mathbf{u},\mathbf{w}\rangle\mathbf{v} - \langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle\mathbf{u} + \langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle\mathbf{w} - \langle \mathbf{w},\mathbf{u}\rangle\mathbf{v} + \langle \mathbf{w},\mathbf{v}\rangle\mathbf{u} - \langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle\mathbf{w} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

4 Premice v $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$



Premico v $\mathbb{R}^2$ (ali $\mathbb{R}^3$) bomo podali kot množico točk (ki jih identificiramo s končnimi točkami vektorjev)

$$\{\mathbf{a} + t\mathbf{s}\ ;\quad t\in\mathbb{R}\}\,, \tag{I.8}$$

kjer sta $\mathbf{a}$ in $\mathbf{s}$ vektorja iz $\mathbb{R}^2$ (oz. $\mathbb{R}^3$) in $\mathbf{s}\neq 0$. Vektor $\mathbf{s}$ imenujemo *smerni vektor* premice, t pa imenujemo *parameter*. Zapis (I.8) imenujemo zapis premice z vektorji. Opozorimo, da je smerni vektor premice določen do množenja z neničelnim skalarjem natanko. |v Ce je $\mathbf{s}$ smerni vektor, je tudi $\alpha\mathbf{s}$ za vsak $\alpha\neq 0$.

Premice bomo označevali s črkami p, q, r ali pa s simboli p_1, p_2, q_1, r_2, ipd.

Zgled 4.1 Poiščimo zapis premice z vektorji, če na njej ležita točki $\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix}3\\1\\-2\end{bmatrix}$. Označimo $\mathbf{a} = \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$ in $\mathbf{b} = \begin{bmatrix}3\\1\\-2\end{bmatrix}$. Smerni vektor premice je potem $\mathbf{s} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = \begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix}$ in zapis premice z vektorji je $\left\{ \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} + t \begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix} \;;\quad t \in \mathbb{R} \right\}$.$\square$

V $\mathbb{R}^2$ se dve različni premici sekata ali pa sta vzporedni. V $\mathbb{R}^3$ pa se dve premici sekata, sta vzporedni ali pa sta mimobežni.

Zgled 4.2 Pokažimo, da se premici $p_1 = \left\{ \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + t \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \;;\quad t \in \mathbb{R} \right\}$ in $p_2 = \left\{ \begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix} + t \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} \;;\quad t \in \mathbb{R} \right\}$ sekata. Premici p_1 in p_2 se sekata natanko tedaj, ko obstajata taki števili t_1 in t_2, da je

$$\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}.$$

To je potem izraz za točko v preseku. Poračunajmo:

$$\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2+t_1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1+t_2\\3-t_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}.$$

Števili t_1 in t_2 morata zadoščati enačbama

$$\begin{aligned} 2+t_1 &= -1+t_2 \\ \text{in} \qquad 1 &= 3-t_2\,. \end{aligned}$$

Od tod dobimo $t_2 = 2$ in $t_1 = -1$. Presečišče premic p_1 in p_2 je točka $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$. $\square$

Doslej smo bili verjetno vajeni premice v ravnini podati z enačbo $y = kx+n$ (ali enačbo $x = a$.). Kako iz te enačbe dobimo zapis z vektorji? Vzamemo npr. $x = t$. Potem je $y = kt + n$ in točke na premici so oblike

$$\begin{bmatrix}t\\kt+n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\n\end{bmatrix} + t \begin{bmatrix}1\\k\end{bmatrix}.$$

Zapis z vektorji je potem

$$\left\{ \begin{bmatrix}0\\n\end{bmatrix} + t \begin{bmatrix}1\\k\end{bmatrix} \;;\quad t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Smerni vektor je $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ k \end{bmatrix}$.

Če je premica podana z enačbo $x = a$, potem vzamemo $y = t$. Na premici so vse točke oblike

$$\begin{bmatrix} a \\ t \end{bmatrix}.$$

Zapis te premice z vektorji je

$$\left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ ; \quad t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Zgled 4.3 Poiščimo zapis z vektorji za premico $y = 2x - 1$.
Po prejšnjem je potem tak zapis podan z

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \ ; \quad t \in \mathbb{R} \right\}.$$ □

Trditev 4.4 *Premici v $\mathbb{R}^3$ sta vzporedni natanko tedaj, ko je vektorski produkt njunih smernih vektorjev enak* 0.

Dokaz Premici sta vzporedni, če lahko z vzporednim premikom eno preslikamo na drugo. To pa je možno natanko tedaj, ko smerna vektorja kažeta v isto smer ali pa v nasprotno smer. Vemo, da je to natanko tedaj, ko je njun vektorski produkt enak $\mathbf{0}$. ■

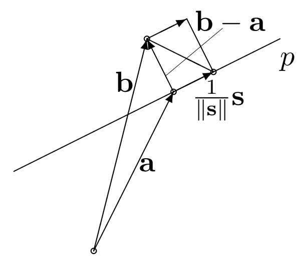
Zgled 4.5 Pokažimo, da sta premici $p_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} \ ; \quad t \in \mathbb{R} \right\}$ in $p_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \ ; \quad t \in \mathbb{R} \right\}$ vzporedni. Njuna smerna vektorja sta $\mathbf{s_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{s_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Vektorski produkt $\mathbf{s_1} \times \mathbf{s_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ in zato sta p_1 in p_2 vzporedni. □

Kako poiščemo razdaljo med dvema točkama? Razdalja med dvema točkama je ravno enaka dolžini vektorja, ki ima ti dve točki za začetno in končno točko.

Zgled 4.6 Poiščimo razdaljo med točkama $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$. Označimo $\mathbf{a} = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ in $\mathbf{b} = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$. Vektor $\mathbf{u} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = \begin{bmatrix}0\\-1\\-1\end{bmatrix}$ ima normo $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{2}$. Zato je razdalja med točkama enaka $\sqrt{2}$. □

Kako poiskati razdaljo med točko in premico? Ta razdalja je definirana kot najmanjša razdalja med dano točko in neko točko na premici. Naj bo $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ dana točka in $p = \{\mathbf{a} + t\mathbf{s}\ ;\quad t \in \mathbb{R}\}$ dana premica. Potem je $\frac{1}{\|\mathbf{s}\|}\mathbf{s}$ enotski smerni vektor v smeri vektorja $\mathbf{s}$ in $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ vektor z začetno točko na premici p in končno v $\mathbf{b}$.



Potem je $\left\|\left(\frac{1}{\|\mathbf{s}\|}\mathbf{s}\right) \times (\mathbf{b} - \mathbf{a})\right\|$ ploščina paralelograma, ki ga določata $\frac{1}{\|\mathbf{s}\|}\mathbf{s}$ in $\mathbf{b} - \mathbf{a}$. Ker je dolžina vektorja $\frac{1}{\|\mathbf{s}\|}\mathbf{s}$ enaka 1, je ploščina paralelograma enaka višini paralelograma. To pa je ravno razdalja točke $\mathbf{b}$ od premice p. Tako smo izpeljali formulo za razdaljo točke $\mathbf{b}$ od premice p:

$$d = \left\|\left(\frac{1}{\|\mathbf{s}\|}\mathbf{s}\right) \times (\mathbf{b} - \mathbf{a})\right\| = \frac{\|\mathbf{s} \times (\mathbf{b} - \mathbf{a})\|}{\|\mathbf{s}\|}.$$

Zgled 4.7 Poiščimo razdaljo točke $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ do premice

$$p = \left\{\begin{bmatrix}3\\2\\-2\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}\ ;\quad t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Označimo $\mathbf{b} = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$, $\mathbf{a} = \begin{bmatrix}3\\2\\-2\end{bmatrix}$, in $\mathbf{s} = \begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$. Potem je $\mathbf{b} - \mathbf{a} = \begin{bmatrix}-2\\-2\\3\end{bmatrix}$ in

$\mathbf{s} \times (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Razdalja točke $\mathbf{b}$ do premice p je potem enaka

$$d = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2}\,. \qquad \square$$

Oglejmo si še, kako poiščemo razdaljo od točke do premice v $\mathbb{R}^2$. Najprej pokažimo trditev, ki nam bo pri tem v pomoč.

Trditev 4.8 *Če sta* $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ *in* $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ *vektorja v* $\mathbb{R}^2$*, potem je ploščina paralelograma, ki ga določata* $\mathbf{u}$ *in* $\mathbf{v}$*, enaka* $|x_1y_2 - x_2y_1|$.

Dokaz Vektorje iz $\mathbb{R}^2$ predstavimo kot vektorja v $\mathbb{R}^3$, tako da jim dodamo tretjo komponento enako 0.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ploščina paralelograma, ki ga določata $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$, je potem enaka dolžini vektorskega produkta vektorjev $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Velja

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{bmatrix}.$$

Norma tega vektorja je enaka $|x_1y_2 - x_2y_1|$. ■

Posledica 4.9 *Razdalja točke* $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ *do premice* $\left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \;;\; t \in \mathbb{R} \right\}$ *je enaka*

$$d = \frac{|(b_1 - a_1)s_2 - (b_2 - a_2)s_1|}{\|\mathbf{s}\|}.$$

Zgled 4.10 Poiščimo razdaljo točke $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ do premice $y = 2x - 1$.

To premico podamo z vektorji kot $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \;;\; t \in \mathbb{R} \right\}$. Potem je

$$d = \frac{|0 - 2|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}\,. \qquad \square$$

Razdalja med dvema premicama v $\mathbb{R}^2$ ali $\mathbb{R}^3$ je enaka najmanjši razdalji med eno točko s prve premice in eno točko z druge premice.

Če se premici sekata, je ta razdalja enaka 0. V $\mathbb{R}^2$ nam potem preostane samo še možnost, da sta premici vzporedni. Tedaj je razdalja med premicama enaka razdalji katerekoli točke na prvi premici do druge premice. To razdaljo pa že znamo izračunati.

Zgled 4.11 Poiščimo razdaljo med premicama $y = \frac{4}{3}x$ in $y = \frac{4}{3}x + 1$.
Z vektorji zapišemo ti dve premici kot

$$p_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix} \ ; \quad t \in \mathbb{R} \right\} \ in \ p_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix} \ ; \quad t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Da malo poenostavimo računanje, bomo vzeli
$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$. Potem je razdalja točke $\mathbf{b}$ do premice p_2 enaka $d = \frac{3}{5}$. □

V $\mathbb{R}^3$ imamo tri možnosti. Če se premici sekata, je razdalja med njima enaka 0, če sta vzporedni, potem poiščemo razdaljo med njima tako, da poiščemo razdaljo ene točke na prvi premici do druge premice. To pa že znamo.

Preostane nam še tretja možnost, da sta p_1 in p_2 mimobežnici. Naj bo $p_1 = \{\mathbf{a_1} + t\mathbf{s_1} \ ; \ t \in \mathbb{R}\}$ in $p_2 = \{\mathbf{a_2} + t\mathbf{s_2} \ ; \ t \in \mathbb{R}\}$. Ker sta p_1 in p_2 mimobežni, je $\mathbf{s_1} \times \mathbf{s_2} \neq 0$. Potem je $|\langle \mathbf{s_1} \times \mathbf{s_2}, \mathbf{a_2} - \mathbf{a_1} \rangle|$ enak volumnu paralelepipeda določenega z vektorji $\mathbf{s_1}$, $\mathbf{s_2}$ in $\mathbf{a_2} - \mathbf{a_1}$. Vektor $\mathbf{s_1} \times \mathbf{s_2}$ je pravokoten na oba smerna vektorja $\mathbf{s_1}$ in $\mathbf{s_2}$. Zato je razdalja med p_1 in p_2 enaka dolžini projekcije vektorja $\mathbf{a_2} - \mathbf{a_1}$ na smer vektorja $\mathbf{s_1} \times \mathbf{s_2}$. Ta projekcija je enaka kvocientu $|\langle \mathbf{s_1} \times \mathbf{s_2}, \mathbf{a_2} - \mathbf{a_1} \rangle|$ z dolžino $\|\mathbf{s_1} \times \mathbf{s_2}\|$. Tako je iskana razdalja med p_1 in p_2 enaka

$$d = \frac{|\langle \mathbf{s_1} \times \mathbf{s_2}, \mathbf{a_2} - \mathbf{a_1} \rangle|}{\|\mathbf{s_1} \times \mathbf{s_2}\|}.$$

Zgled 4.12 Poiščimo razdaljo med premicama

$$p_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} \ ; \quad t \in \mathbb{R} \right\} \text{ in } p_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \ ; \quad t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Označimo $\mathbf{a_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a_2} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{s_1} = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{s_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Potem je $\mathbf{a_2} - \mathbf{a_1} = \begin{bmatrix} -6 \\ 8 \\ -3 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{s_1} \times \mathbf{s_2} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$. Razdalja med premicama je enaka $d = \frac{27}{\sqrt{8}} = \frac{9}{2}\sqrt{2}$. □

Kot med premicama. Če se premici sekata, potem je kot med njima enak kotu med njunima smernima vektorjema.

Zgled 4.13 Poiščimo kot med premicama $p_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \;;\; t \in \mathbb{R} \right\}$ in $p_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \;;\; t \in \mathbb{R} \right\}$. Najprej preverimo, da se premici res sekata. Poiskati moramo taka t_1 in t_2, da je

$$\begin{bmatrix} 1 + t_1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + t_2 \\ 2 \\ t_2 \end{bmatrix},$$

oziroma $1 + t_1 = 2 + t_2$ in $-1 = t_2$. Od tod dobimo $t_2 = -1$ in $t_1 = 0$. Presečišče premic je točka $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Smerna vektorja sta $\mathbf{s_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{s_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Kot med njima dobimo s pomočjo zveze

$$\cos\varphi = \frac{\langle \mathbf{s_1}, \mathbf{s_2} \rangle}{\|\mathbf{s_1}\| \|\mathbf{s_2}\|}.$$

V našem primeru je $\cos\varphi = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ in zato je $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ($\varphi = 45°$). □

5 Ravnine v $\mathbb{R}^3$

Ravnina je natanko določena s tremi točkami, ki ne ležijo na isti premici. Če so to $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$ in $\mathbf{a_3}$, potem poljubno točko na ravnini lahko zapišemo kot

$$\mathbf{a_1} + t_1(\mathbf{a_2} - \mathbf{a_1}) + t_2(\mathbf{a_3} - \mathbf{a_1})$$

za neka t_1, $t_2 \in \mathbb{R}$. Kot smo to naredili za premico, bi ravnino lahko spet napisali z vektorji, le da bi tokrat rabili dva "smerna vektorja". Izkaže se, da tak zapis ni pripraven in zato ravnino podamo drugače. Spomnimo se, da je vektorski produkt pravokoten na oba faktorja.

Naj bodo $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$ in $\mathbf{a_3}$ kot zgoraj tri točke, ki niso na isti premici. Te tri točke določajo ravnino, ki jo označimo s Π. Označimo še $\mathbf{s_1} = \mathbf{a_2} - \mathbf{a_1}$ in $\mathbf{s_2} = \mathbf{a_3} - \mathbf{a_1}$. Potem je vsak vektor $t_1\mathbf{s_1} + t_2\mathbf{s_2}$ pravokoten na $\mathbf{s_1} \times \mathbf{s_2}$:

$$\begin{aligned}\langle t_1\mathbf{s_1} + t_2\mathbf{s_2}, \mathbf{s_1} \times \mathbf{s_2}\rangle &= t_1\langle \mathbf{s_1}, \mathbf{s_1} \times \mathbf{s_2}\rangle + t_2\langle \mathbf{s_2}, \mathbf{s_1} \times \mathbf{s_2}\rangle = \\ &= t_1\langle \mathbf{s_1} \times \mathbf{s_2}, \mathbf{s_2}\rangle + t_2\langle \mathbf{s_2} \times \mathbf{s_2}, -\mathbf{s_1}\rangle = 0\,.\end{aligned}$$

Za poljubno točko $\mathbf{a_1} + t_1\mathbf{s_1} + t_2\mathbf{s_2}$ na ravnini Π potem velja

$$\langle \mathbf{a_1} + t_1\mathbf{s_1} + t_2\mathbf{s_2}, \mathbf{s_1} \times \mathbf{s_2}\rangle = \langle \mathbf{a_1}, \mathbf{s_1} \times \mathbf{s_2}\rangle\,.$$

Označimo $\mathbf{n} = \mathbf{s_1} \times \mathbf{s_2}$ in $d = \langle \mathbf{a_1}, \mathbf{s_1} \times \mathbf{s_2}\rangle$. Potem je ravnina Π ravno množica točk

$$\left\{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3\ ;\quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{n}\rangle = d\right\}\,.$$

Če označimo $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ in $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, je ravnina Π ravno množica točk $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, ki zadoščajo enačbi

$$ax + by + cz = d\,.$$

Vektor $\mathbf{n}$ je pravokoten na ravnino Π. Imenujemo ga *normalni vektor* ravnine Π.

Zgled 5.1 Poiščimo normalni vektor in enačbo za ravnino določeno s točkami $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$. Označimo $\mathbf{a_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{a_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$. Potem je $\mathbf{a_2} - \mathbf{a_1} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{a_3} - \mathbf{a_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Njun vektorski produkt je potem $(\mathbf{a_2} - \mathbf{a_1}) \times (\mathbf{a_3} - \mathbf{a_1}) = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$. Za normalni vektor bomo vzeli $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Ker je $\langle \mathbf{n}, \mathbf{a_1}\rangle = 3$ je enačba ravnine enaka $2x + y + z = 3$. $\square$

Dve različni ravnini v $\mathbb{R}^3$ sta lahko vzporedni ali pa se sekata. Velja naslednja trditev:

Trditev 5.2 *Ravnini*

$$\Pi_1 = \left\{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3\ ;\quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{n_1}\rangle = d_1\right\}\ \textit{in}\ \Pi_2 = \left\{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3\ ;\quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{n_2}\rangle = d_2\right\}$$

sta vzporedni (lahko je tudi $\Pi_1 = \Pi_2$*) natanko tedaj, ko je* $\mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2} = \mathbf{0}$.

Dokaz Trditev sledi iz dejstva, da sta ravnini vzporedni natanko tedaj, ko njuna normalna vektorja kažeta v isto ali nasprotno smer. To pa je ekvivalentno s tem, da je $\mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2} = \mathbf{0}$. ■

Trditev 5.3 *Premica* $p = \{\mathbf{a} + t\mathbf{s} \ ; \ t \in \mathbb{R}\}$ *in ravnina* $\Pi = \left\{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 \ ; \ \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle = d\right\}$ *sta vzporedni natanko tedaj, ko je* $\langle \mathbf{n}, \mathbf{s} \rangle = 0$.

Dokaz Premica in ravnina sta vzporedni natanko tedaj, ko lahko premico z vzporednim premikom prestavimo na premico. To pa je mogoče natanko tedaj, ko sta $\mathbf{n}$ in $\mathbf{s}$ pravokotna, oziroma ko je $\langle \mathbf{n}, \mathbf{s} \rangle = 0$. ■

Zgled 5.4 Poglejmo, ali sta premica $p = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \ ; \quad t \in \mathbb{R} \right\}$ in ravnina Π z enačbo $x - 3y - 5z = 5$ vzporedni. Ali morda velja $p \subseteq \Pi$? Označimo $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Izračunajmo skalarni produkt $\mathbf{n}$ in $\mathbf{s}$: $\langle \mathbf{n}, \mathbf{s} \rangle = 1 - 6 + 5 = 0$. Vektorja $\mathbf{s}$ in $\mathbf{n}$ sta pravokotna, zato sta premica in ravnina vzporedni. Poglejmo, ali je $\mathbf{a} \in \Pi$. Velja $\langle \mathbf{n}, \mathbf{a} \rangle = 2 + 3 + 0 = 5$, zato je $\mathbf{a} \in \Pi$. Ker sta p in Π vzporedni, je potem $p \subseteq \Pi$. □

Če dve različni ravnini nista vzporedni, potem je njun presek premica. Smerni vektor te premice dobimo tako, da poiščemo vektorski produkt normalnih vektorjev ravnin.

Zgled 5.5 Poiščimo zapis z vektorji za premico, ki je presek ravnin z enačbama $x - y + z = 2$ in $2x - 3y + 4z = 7$. Označimo $\mathbf{n_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{n_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Njun vektorski produkt je $\mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Za smerni vektor premice vzamemo $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Poiščimo še točko v preseku ravnin. Koordinate te točke $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ morajo zadoščati obema enačbama ravnin $x - y + z = 2$ in $2x - 3y + 4z = 7$. Če prvo enačbo pomnožimo z -2 in prištejemo drugi enačbi, dobimo $-y + 2z = 3$. Izberemo $z = 1$. Potem mora biti $y = -1$ in $x = 0$. Zapis premice z vektorji je

$$p = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \ ; \quad t \in \mathbb{R} \right\}. \qquad \square$$

Poglejmo si še, kako poiščemo razdaljo točke, premice ali ravnine do dane ravnine.

Razdalja med točko in ravnino je najmanjša razdalja med dano točko in neko točko na ravnini. Naj bo $\mathbf{n}$ normalni vektor ravnine, $\mathbf{b}$ dana točka in $\mathbf{a}$ neka točka na ravnini. Potem je razdalja točke $\mathbf{b}$ do ravnine enaka dolžini pravokotne projekcije vektorja $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ na smer vektorja $\mathbf{n}$. Ta pa je enaka

$$d = \frac{|\langle \mathbf{b}-\mathbf{a}, \mathbf{n}\rangle|}{\|\mathbf{n}\|}.$$

Zgled 5.6 Poiščimo razdaljo točke $\begin{bmatrix}4\\0\\1\end{bmatrix}$ do ravnine z enačbo $2x-y+2z=3$.

Označimo $\mathbf{b} = \begin{bmatrix}4\\0\\1\end{bmatrix}$, $\mathbf{n} = \begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix}$ in $\mathbf{a} = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$. Potem je $\mathbf{b}-\mathbf{a} = \begin{bmatrix}3\\1\\1\end{bmatrix}$ in $\langle \mathbf{b}-\mathbf{a}, \mathbf{n}\rangle = 7$. Norma vektorja $\mathbf{n}$ je $\|\mathbf{n}\| = 3$. Razdalja med točko in ravnino je $\frac{7}{3}$. $\square$

Razmislimo, **kako dobimo razdaljo med premico in ravnino**. Če se premica in ravnina sekata, je razdalja med njima enaka 0. Če se ne sekata, sta vzporedni in potem je razdalja enaka razdalji katerekoli točke na premici do ravnine.

Zgled 5.7 Poiščimo razdaljo premice $p = \left\{ \begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} \quad ; \quad t \in \mathbb{R} \right\}$ do ravnine $x-2y-2z=0$.

Označimo $\mathbf{s} = \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$, $\mathbf{n} = \begin{bmatrix}1\\-2\\-2\end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}$ in $\mathbf{a} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$. Potem je $\langle \mathbf{n}, \mathbf{s}\rangle = 0$ in premica in ravnina sta vzporedni. Velja $\mathbf{b}-\mathbf{a} = \begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}$, $\langle \mathbf{b}-\mathbf{a}, \mathbf{n}\rangle = 4$ in $\|\mathbf{n}\| = 3$. Iskana razdalja je enaka $\frac{4}{3}$. $\square$

Kako dobimo razdaljo med dvema ravninama? Če se sekata, je razdalja med njima enaka 0, sicer pa sta vzporedni in je razdalja med njima enaka razdalji katerekoli točke na prvi ravnini do druge ravnine.

Zgled 5.8 Poiščimo razdaljo med ravninama z enačbama $x + y = 1$ in $x + y = 3$. Opazimo, da je $\mathbf{n_1} = \mathbf{n_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ in zato sta ravnini res vzporedni ($\mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2} = \mathbf{0}$). Pišimo $\mathbf{n} = \mathbf{n_1} = \mathbf{n_2}$. Izberimo $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ na prvi ravnini in $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ na drugi ravnini. Potem je $\mathbf{b} - \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ in $\langle \mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle = 2$. Velja še $\|\mathbf{n}\| = \sqrt{2}$ in zato je razdalja med ravninama enaka $\sqrt{2}$. □

Kot med ravninama je enak kotu med njunima normalnima vektorjema.

Zgled 5.9 Poiščimo kot med ravninama $x + z = 2$ in $2x - 2y + z = 7$. Potem označimo $\mathbf{n_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{n_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Ker je $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \neq 0$, se ravnini sekata. Velja $\cos\varphi = \frac{\langle \mathbf{n_1}, \mathbf{n_2} \rangle}{\|\mathbf{n_1}\| \|\mathbf{n_2}\|} = \frac{3}{\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Zato je kot med ravninama enak $\varphi = \frac{\pi}{4}$. □

Za konec poglavja si poglejmo še en zapis premice.

Naj bo $p = \{\mathbf{a} + t\mathbf{s}\,;\ \ t \in \mathbb{R}\}$ zapis premice z vektorji in $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ ter $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}$. Privzemimo najprej, da so vse tri komponente vektorja $\mathbf{s}$ različne od 0. Potem imajo točke na premici obliko

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + ts_1 \\ a_2 + ts_2 \\ a_3 + ts_3 \end{bmatrix} .$$

Izrazimo t iz vseh treh enačb:

$$t = \frac{x - a_1}{s_1} = \frac{y - a_2}{s_2} = \frac{z - a_3}{s_3} .$$

Premico tako lahko podamo v obliki

$$\frac{x - a_1}{s_1} = \frac{y - a_2}{s_2} = \frac{z - a_3}{s_3} .$$

Če je katera od komponent vektorja $\mathbf{s}$ enaka 0, denimo, da je $s_1 = 0$, s_2 in s_3 pa sta različna od 0. Potem premico podamo z enačbama $\frac{y-a_2}{s_2} = \frac{z-a_3}{s_3}$ in $x = a_1$.

Zgled 5.10 Poiščimo kot med premicama podanima z enačbami:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{-1} \quad \text{in} \quad \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{2}\,.$$

Smerna vektorja premic sta potem $\mathbf{s_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{s_2} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Njun skalarni produkt je $\langle \mathbf{s_1}, \mathbf{s_2} \rangle = 10 - 8 - 2 = 0$. Če se premici sekata, je med njima pravi kot. Očitno je točka $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ na obeh premicah. Torej sta premici pravokotni.$\square$

Zgled 5.11 Poiščimo razdaljo med premico z enačbama $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-4}$ in $z = 0$ ter premico z enačbama $x = 1$ in $y = -2$. Smerni vektor prve premice je $\mathbf{s_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$ in smerni vektor druge premice je $\mathbf{s_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Na prvi premici leži točka $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, na drugi pa točka $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Potem je $\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{b} - \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$. Razdalja med premicama je enaka

$$d = \frac{|\langle \mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{s_1} \times \mathbf{s_2} \rangle|}{\|\mathbf{s_1} \times \mathbf{s_2}\|} = \frac{\left| \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \right|}{\left\| \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|} = \frac{12}{5}\,. \qquad \square$$