Poglavje VI

Vektorski prostori

V tem poglavju bomo predstavili abstraktno definicijo vektorskega prostora in osnovne pojme povezane z vektorskimi prostori. Konkreten zgled vektorskih prostorov so vektorski prostori $\mathbb{R}^n$, ki smo jih obravnavali v prvem poglavju.

1 Definicija in osnovne lastnosti

Definicija 1.1 Naj bo $\mathcal{O}$ komutativen obseg. Potem rečemo, da je množica V, na kateri sta dani operaciji $+ : V \times V \to V$ in $\cdot : \mathcal{O} \times V \to V$ *vektorski prostor*, če velja:

1.) $(V, +)$ je Abelova grupa,

2.) $(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{v} = \alpha \cdot \mathbf{v} + \beta \cdot \mathbf{v}$ za vse α, $\beta \in \mathcal{O}$ in vse $\mathbf{v} \in V$,

3.) $\alpha \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha \cdot \mathbf{u} + \alpha \cdot \mathbf{v}$ za vse α, $\beta \in \mathcal{O}$ in vse $\mathbf{v} \in V$,

4.) $\alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{v}) = (\alpha\beta) \cdot \mathbf{v}$ za vse α, $\beta \in \mathcal{O}$ in vse $\mathbf{v} \in V$,

5.) $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$ za vse $\mathbf{v} \in V$.

V našem učbeniku se bomo omejili samo na primera, ko je $\mathcal{O}$ bodisi $\mathbb{R}$ bodisi $\mathbb{C}$. $\Diamond$

Opomba 1.2 Naj bo V vektorski prostor. Elementom iz V bomo običajno rekli *vektorji*. Operacijo $+ : V \times V \to V$ imenujemo *seštevanje vektorjev* in operacijo $\cdot : \mathcal{O} \times V \to V$ *množenje vektorja s skalarjem*. Namesto $\alpha \cdot \mathbf{v}$ pišemo običajno kar $\alpha\mathbf{v}$. $\Diamond$

Zgled 1.3 **1**.) $V = \mathbb{R}^n$ je vektorski prostor za operaciji, ki smo ju definirali v prvem poglavju.

2.) $V = \mathbb{R}^{m\times n}$ je vektorski prostor za operaciji seštevanje matrik in množenje matrike s skalarjem.

3.) $V = \mathcal{C}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je zvezna funkcija$\}$ je vektorski prostor za seštevanje definirano s predpisom $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ za vse $x \in \mathbb{R}$ in množenje s skalarjem definirano s predpisom $(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$ za vse $x \in \mathbb{R}$. Res je $(V, +)$ Abelova grupa:

- Asociativnost:

$$\begin{aligned}((f+g)+h)(x) &= (f+g)(x) + h(x) = f(x) + g(x) + h(x) = \\ &= f(x) + (g+h)(x) = (f + (g+h))(x)\end{aligned}$$

  za vse $x \in \mathbb{R}$.

- Enota je funkcija $f(x) = 0$ za vse x. Označimo jo z 0: $(f+0)(x) = f(x) = (0+f)(x)$ za vse $x \in \mathbb{R}$.
- Inverz je funkcija $(-f)(x) = -f(x)$: $(f + (-f))(x) = 0 = (-f + f)(x)$ za vse $x \in \mathbb{R}$.
- Komutativnost: $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = g(x)+f(x) = (g+f)(x)$ za vse $x \in \mathbb{R}$.

Veljajo tudi ostale lastnosti iz definicije vektorskega prostora:

- $$\begin{aligned}\alpha(f+g)(x) &= \alpha(f(x) + g(x)) = \alpha f(x) + \alpha g(x) = \\ &= (\alpha f)(x) + (\alpha g)(x) = (\alpha f + \alpha g)(x)\ \ .\end{aligned}$$

- $$((\alpha\beta)f)(x) = (\alpha\beta)f(x) = \alpha(\beta f(x)) = \alpha((\beta f)(x)) = (\alpha(\beta f))(x).$$

- $$\begin{aligned}((\alpha+\beta)f)(x) &= (\alpha+\beta)f(x) = \alpha f(x) + \beta f(x) = \\ &= (\alpha f)(x) + (\beta f)(x) = (\alpha f + \beta f)(x)\ \ .\end{aligned}$$

- $$(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x) \ .$$

4.) $V = \mathbb{R}[x]$ je vektorski prostor za običajno seštevanje polinomov ter množenje s skalarjem, ki je definirano kot množenje polinoma s skalarjem. Preveri za vajo, da so izpolnjeni vsi pogoji iz definicije vektorskega prostora. □

Trditev 1.4 *Naj bo V vektorski prostor. Potem je $0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$.*

Dokaz V vektorskem prostoru velja $0 \cdot \mathbf{v} = (0+0) \cdot \mathbf{v} = 0 \cdot \mathbf{v} + 0 \cdot \mathbf{v}$. Ker je V Abelova grupa, od tod sledi, da je $0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$. ■

Definicija 1.5 Naj bo V vektorski prostor nad obsegom $\mathcal{O}$. Potem je podmnožica $U \subseteq V$ *vektorski podprostor*, če je zaprta za obe operaciji:

1.) $(U, +)$ je podgrupa v $(V, +)$,

2.) $\alpha \cdot \mathbf{u} \in U$ za vse $\alpha \in \mathcal{O}$ in vse $\mathbf{u} \in U$. ◊

Trditev 1.6 *Podmnožica $U \subseteq V$ je vektorski podprostor natanko tedaj, ko je $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} \in U$ za vse α, $\beta \in \mathcal{O}$ in vse $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in U$.*

Dokaz Naj bo U vektorski podprostor v V. Zato je $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$ za poljubna $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ in $\alpha \cdot \mathbf{u} \in U$ za vsak $\alpha \in \mathcal{O}$ in vsak $\mathbf{u} \in U$. Izberimo α, $\beta \in \mathcal{O}$ in $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$. Potem sta $\alpha \cdot \mathbf{u}$ in $\beta \cdot \mathbf{v}$ v U in je tudi $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} \in U$.

Obratno, naj bo $U \subseteq V$ podmnožica, za katero je $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} \in U$ za vsaka α, $\beta \in \mathcal{O}$ in vsaka $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in U$. Izberimo $\alpha = 1$ in $\beta = -1$. Potem je $\mathbf{u} - \mathbf{v} \in U$ za vse $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in U$ in zato je $(U, +)$ podgrupa v $(V, +)$. Če vzamemo $\beta = 0$, dobimo, da je $\alpha\mathbf{u} \in U$ za vse $\alpha \in \mathcal{O}$ in vse $\mathbf{u} \in U$. Zato je U res vektorski podprostor v V. ■

Zgled 1.7 **1.)** Naj bo $V = \mathbb{R}^2$ in $U = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$. Potem je U vektorski podprostor: Za poljubna α, $\beta \in \mathcal{O}$ in $\begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} y \\ -y \end{bmatrix} \in U$ velja

$$\alpha \begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} y \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x + \beta y \\ -\alpha x - \beta y \end{bmatrix} \in U \ .$$

2.) Naj bo $V = \mathbb{R}[x]$ in $U = \mathbb{R}_n[x]$ podmnožica vseh polinomov stopnje največ n. Torej je

$$U = \{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \ ; \ a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}\} \ .$$

Za poljubna α, $\beta \in \mathbb{R}$ in polinoma $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ iz $\mathbb{R}_n[x]$ velja

$$\alpha p(x) + \beta q(x) = \sum_{i=0}^{n} (\alpha a_i + \beta b_i) x^i \in \mathbb{R}_n[x] \ .$$

Zato je $\mathbb{R}_n[x]$ res vektorski podprostor v $\mathbb{R}[x]$.

3.) Naj bo $V = \mathbb{R}^2$. Kaj so vektorski podprostori v $\mathbb{R}^2$? Če je $U \subseteq V$ vektorski podprostor, potem je U podgrupa v V in zato vsebuje enoto za seštevanje, to je vektor $\mathbf{0}$. Ali je $U = \{\mathbf{0}\}$ vektorski podprostor? Ker je $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ in $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ za vse $\alpha \in \mathcal{O}$, je $\{\mathbf{0}\}$ res vektorski podprostor.

($\{\mathbf{0}\}$ je vektorski podprostor v vsakem vektorskem prostoru. Označimo ga z $\mathbf{0}$ in imenujemo *trivialni podprostor* ali tudi *ničelni podprostor*.)

Če je $U \neq \mathbf{0}$, potem vsebuje nek neničelen vektor $\mathbf{u}$. Ker je U zaprt za množenje s skalarji, vsebuje vse vektorje oblike $\alpha\mathbf{u}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. U torej vsebuje premico s smernim vektorjem $\mathbf{u}$, ki gre skozi točko $\mathbf{0}$. Ali je $U = \{\alpha\mathbf{u} \ ; \ \alpha \in \mathbb{R}\}$ vektorski podprostor? Vzemimo $\alpha\mathbf{u}$, $\beta\mathbf{u} \in U$ in dva skalarja γ, $\delta \in \mathbb{R}$. Potem je $\gamma(\alpha\mathbf{u}) + \delta(\beta\mathbf{u}) = (\gamma\alpha + \delta\beta)\mathbf{u}$ v U in zato U je vektorski podprostor.

Kaj pa če U poleg neke premice $p_0 = \{\alpha\mathbf{u} \ ; \ \alpha \in \mathbb{R}\}$ vsebuje še kak drug vektor $\mathbf{v}$? Potem U vsebuje vse vektorje oblike $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$. Za vsak $\beta \in \mathbb{R}$ je množica $p_\beta = \{\beta\mathbf{v} + \alpha\mathbf{v} \ ; \ \alpha \in \mathbb{R}\}$ premica vzporedna s premico p_0. Množica vseh premic p_β, $\beta \in \mathbb{R}$ pa pokrije celo ravnino $\mathbb{R}^2$, zato je $U = \mathbb{R}^2$. Tako so v $\mathbb{R}^2$ vsi možni vektorski podprostori naslednji: $\mathbf{0}$, $\mathbb{R}^2$, vse premice skozi $\mathbf{0}$.

4.) Podobno, kot v prejšnjem zgledu pokažemo, da so vsi možni vektorski podprostori v $\mathbb{R}^3$ naslednji: $\mathbf{0}$, vse premice skozi $\mathbf{0}$, vse ravnine, ki vsebujejo $\mathbf{0}$ in $\mathbb{R}^3$. $\square$

Naj bo V vektorski prostor nad obsegom $\mathcal{O}$. Potem vektor $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$ imenujemo *linearna kombinacija* vektorjev $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$. Podobno za $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathcal{O}$

in $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$ vektor

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{v}_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{v}_i$$

imenujemo linearna kombinacija vektorjev $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$.

Zgled 1.8 **1.)** Ali je v $V = \mathbb{R}^3$ vektor $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ linearna kombinacija vektorjev $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$?

Iščemo taka skalarja α, β, da bo

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Za α in β tako dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} \alpha &= 2 \\ \alpha + 2\beta &= 0 \\ -\beta &= 1 \ , \end{aligned}$$

ki imajo rešitev $\alpha = 2$ in $\beta = -1$.

2.) Vektor $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ ni linearna kombinacija vektorjev $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, saj sistem enačb

$$\begin{aligned} \alpha &= 2 \\ \alpha + 2\beta &= 0 \\ -\beta &= -1 \end{aligned}$$

nima rešitev. $\square$

Trditev 1.9 *Dani so vektorji $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$. Potem je množica vseh linearnih kombinacij teh vektorjev vektorski podprostor v V.*

Dokaz Naj bosta $\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{v}_i$ in $\sum_{i=1}^k \beta_i \mathbf{v}_i$ dve linearni kombinaciji vektorjev $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ in γ, δ dva skalarja. Potem je

$$\gamma(\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{v}_i) + \delta(\sum_{i=1}^k \beta_i \mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^k (\gamma\alpha_i + \delta\beta_i)\mathbf{v}_i$$

spet linearna kombinacija vektorjev $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$. Zato je množica vseh linearnih kombinacij vektorski podprostor v V. ■

Definicija 1.10 Množico vseh linearnih kombinacij vektorjev $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ imenujemo *linearna ogrinjača* vektorjev $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$. Označimo jo z $\mathscr{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$. Prejšnja trditev nam pove, da je linearna ogrinjača vektorski podprostor.

Če je $\mathscr{M} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ neka končna podmnožica vektorjev iz V, potem z $\mathscr{L}(\mathscr{M})$ označimo linearno ogrinjačo $\mathscr{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$. ♢

Zgled 1.11 Kaj je linearna ogrinjača vektorjev $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix}0\\2\\-1\end{bmatrix}$ v $\mathbb{R}^3$? Vemo, da so vektorski podprostori v $\mathbb{R}^3$ premice skozi $\mathbf{0}$, ravnine, ki vsebujejo $\mathbf{0}$ in $\mathbb{R}^3$. Kaj je premica skozi $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix}0\\2\\-1\end{bmatrix}$ v $\mathbb{R}^3$? Le-ta ima smerni vektor $\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$ in je zato to množica

$$p = \left\{ \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix} \;;\, t \in \mathbb{R} \right\} .$$

Ker p ne vsebuje $\mathbf{0}$, p ni vektorski podprostor. Ravnina, ki vsebuje $\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix}0\\2\\-1\end{bmatrix}$, pa je vektorski podprostor. Ta ravnina ima enačbo $-x+y+2z=0$, saj je $\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}0\\2\\-1\end{bmatrix}$. V prejšnjem zgledu smo pokazali, da ni vsak vektor v $\mathbb{R}^3$ linearna kombinacija vektorjev $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix}0\\2\\-1\end{bmatrix}$, zato je ta ravnina ravno linearna ogrinjača naših dveh vektorjev. □

Trditev 1.12 *Linearna ogrinjača* $\mathscr{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ *je najmanjši vektorski prostor, ki vsebuje vektorje* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$.

Dokaz Privzemimo, da je U najmanjši tak vektorski podprostor, ki vsebuje vse vektorje $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$. Ker je U vektorski podprostor, vsebuje tudi vektorje $\alpha_1\mathbf{v}_1, \alpha_2\mathbf{v}_2, \dots, \alpha_k\mathbf{v}_k$ za poljubne skalarje $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, ter tudi njihovo vsoto $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{v}_k$. Torej U vsebuje vse linearne kombinacije vektorjev $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ in zato je $\mathscr{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k) \subseteq U$. Ker je $\mathscr{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ vektorski podprostor, mora biti $\mathscr{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k) = U$ zaradi minimalnosti U. ■

2 Baza vektorskega prostora

Definicija 2.1 Naj bodo $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorji iz vektorskega prostora V. Rečemo, da so vektorji $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ *linearno odvisni*, če obstajajo taki skalarji $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, ne vsi enaki nič, da je $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$.

Če vektorji $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ niso linearno odvisni, potem rečemo, da so *linearno neodvisni.* ◊

Opomba 2.2 Vektorji $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ so linearno neodvisni natanko tedaj, ko iz enakosti $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ sledi $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$. ◊

Zgled 2.3 **1.)** Ali sta vektorja $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix}0\\2\\-1\end{bmatrix}$ linearno neodvisna? Iz enakosti

$$\alpha\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}0\\2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

dobimo enačbe $\alpha = 0$, $\alpha + 2\beta = 0$ in $-\beta = 0$. Edina rešitev je tako $\alpha = \beta = 0$. Zato sta vektorja linearno neodvisna.

2.) Ali so vektorji $\mathbf{u} = \begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}4\\2\\0\end{bmatrix}$ in $\mathbf{w} = \begin{bmatrix}0\\1\\6\end{bmatrix}$ linearno neodvisni? Iz zveze

$$\alpha\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}4\\2\\0\end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix}0\\1\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

dobimo homogen sistem linearnih enačb $\alpha + 4\beta = 0$, $\alpha + 2\beta + \gamma = 0$ in $3\alpha + 6\gamma = 0$. Tega rešimo s pomočjo Gaußove eliminacije:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -12 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Vidimo, da ima naš sistem neničelne rešitve, npr. $\gamma = 2$, $\beta = 1$ in $\alpha = -4$. Zato so vektorji $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ in $\mathbf{w}$ linearno odvisni. □

Za množico vektorjev $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ rečemo, da je *linearno odvisna* (oz. *neodvisna*), če so vektorji $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ linearno odvisni (oz. neodvisni).

Trditev 2.4 *Če množica $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ vsebuje vektor $\mathbf{0}$, potem je linearno odvisna.*

Dokaz Recimo, da je $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$. Potem je $1 \cdot \mathbf{v}_1 + 0 \cdot \mathbf{v}_2 + 0 \cdot \mathbf{v}_3 + \cdots + 0 \cdot \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ in so $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ res linearno odvisni. ■

Naj bodo $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ neničelni vektorji, ki so linearno odvisni. Obstajajo torej taki skalarji $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, ne vsi enaki 0, da je

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

Recimo, da je $\alpha_1 \neq 0$. Potem je

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\mathbf{v}_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\mathbf{v}_3 - \cdots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1}\mathbf{v}_k \ .$$

Vektor $\mathbf{v}_1$ je torej linearna kombinacija vektorjev $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_k$. Zato je

$$\mathscr{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k) = \mathscr{L}(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_k).$$

Res: Če je $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^k \gamma_i\mathbf{v}_i$, je

$$\mathbf{u} = \sum_{i=2}^k \gamma_i\mathbf{v}_i + \gamma_1 \sum_{i=2}^k \left(-\frac{\alpha_i}{\alpha_1}\right)\mathbf{v}_i = \sum_{i=2}^k \left(\gamma_i - \frac{\gamma_1\alpha_i}{\alpha_1}\right)\mathbf{v}_i \ .$$

Enak razmislek pokaže naslednjo trditev:

Trditev 2.5 *Naj bo $U = \mathscr{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$ in naj bo $\mathbf{v}_j$ linearna kombinacija vektorjev $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{j-1}, \mathbf{v}_{j+1}, \ldots, \mathbf{v}_k$. Potem je*

$$U = \mathscr{L}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{j-1}, \mathbf{v}_{j+1}, \ldots, \mathbf{v}_k)\,.$$

Definicija 2.6 Množico vektorjev $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ imenujemo *baza vektorskega prostora V*, če velja:

- $V = \mathscr{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$,
- vektorji $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ so linearno neodvisni. $\Diamond$

Zgled 2.7 **1.)** Naj bo $V = \mathbb{R}^3$. Označimo $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Potem je množica $\mathscr{S} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ baza za V. Naj bo $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$ nek vektor iz V. Potem je

$$\mathbf{u} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 + \gamma\mathbf{e}_3$$

in zato je $\mathscr{L}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = V$. Če je

$$\alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 + \gamma\mathbf{e}_3 = \mathbf{0} \ ,$$

sledi $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Zato so $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ tudi linearno neodvisni. Množica $\mathscr{S}$ je res baza za $V = \mathbb{R}^3$. Bazo $\mathscr{S}$ imenujemo *standardna baza vektorskega prostora* $\mathbb{R}^3$.

2.) Naj bo $V = \mathbb{R}^n$ in označimo z $\mathbf{e}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ vektor, ki ima edino neničelno komponento na i-tem mestu in je ta enaka 1. Pri tem je $i = 1, 2, \ldots, n$. Podobno kot v prvem zgledu pokažemo, da je množica $\mathscr{S} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ baza za V. Imenujemo jo *standardna baza za* $\mathbb{R}^n$.

3.) Naj bo $V = \mathbb{R}_2[x]$. Potem je množica $\{1, x, x^2\}$ baza za V. Izberimo nek polinom $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ iz V. Potem je $p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$ in zato je $V = \mathscr{L}(1, x, x^2)$. Polinomi 1, x, x^2 so linearno neodvisni, saj iz enakosti $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot x + \gamma \cdot x^2 = 0$ sledi $\alpha = \beta = \gamma = 0$. □

Naj bo $\mathbf{u} \in V$ poljuben vektor in $\mathscr{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ baza za V. Potem obstajajo taki skalarji $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, da je

$$\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n \ . \tag{VI.1}$$

Zapis (VI.1) imenujemo *razvoj vektorja* $\mathbf{u}$ po bazi $\mathscr{B}$. Pisali bomo tudi $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}_{\mathscr{B}}$ in tako enačili vektor $\mathbf{u}$ z n-terico $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$. Indeks $\mathscr{B}$ nam bo povedal, glede na katero bazo smo razvili vektor $\mathbf{u}$. (Kasneje bomo indeks $\mathscr{B}$ izpuščali.)

Trditev 2.8 *Vsak vektor $\mathbf{u} \in V$ ima natanko en razvoj po bazi $\mathscr{B}$.*

Dokaz Iz prve lastnosti v definiciji baze sledi, da je vsak vektor linearna kombinacija vektorjev iz baze, oziroma povedano drugače, da ima vsak vektor razvoj po bazi. Denimo, da sta $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\mathbf{v}_i$ in $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i\mathbf{v}_i$ dva razvoja po bazi. Potem je $\mathbf{0} = \mathbf{u} - \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i)\mathbf{v}_i$. Ker so $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ linearno neodvisni, je $\alpha_i - \beta_i = 0$ za vse i, oziroma $\alpha_i = \beta_i$. Zato ima $\mathbf{u}$ res natanko en razvoj po bazi $\mathscr{B}$. ■

Izrek 2.9 *Naj bosta $\mathscr{B}_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ in $\mathscr{B}_2 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ dve bazi za vektorski prostor V. Potem je $n = m$.*

Dokaz Razvijmo vektorje iz baze $\mathscr{B}_2$ po bazi $\mathscr{B}_1$. Potem je

$$\mathbf{u}_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\mathbf{v}_i \quad ; j = 1, 2, \ldots, m \ ,$$

za neke skalarje α_{ij}. Naj bo $A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nm} \end{bmatrix}$ in $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} \in \mathcal{O}^m$ tak vektor, da je $A\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Potem je

$$\mathbf{0} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\beta_j \right) \mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^{m} \beta_j\mathbf{u}_j \ .$$

Ker je $\mathscr{B}_2$ baza, so $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m$ linearno neodvisni in zato je

$$\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_m = 0.$$

Torej ima sistem $A\mathbf{b} = \mathbf{0}$ samo trivialno rešitev $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Od tod sklepamo, da je $m \leq n$. Če zamenjamo vlogi $\mathscr{B}_1$ in $\mathscr{B}_2$, dobimo tudi $n \leq m$. Zato je $m = n$. ■

Definicija 2.10 Naj bo $\mathscr{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ baza vektorskega prostora V. Potem število vektorjev v bazi imenujemo *dimenzija* (ali *razsežnost*) vektorskega prostora V. Pišemo

$$\dim V = n \ .$$

Dogovorimo se še, da ima vektorski prostor $\mathbf{0}$ dimenzijo enako 0. ◊

Zgled 2.11 **1.)** Vemo, da je v standardni bazi za $V = \mathbb{R}^n$ n elementov, zato je $\dim \mathbb{R}^n = n$.

2.) Množica $\{1, x, \ldots, x^n\}$ je baza za $V = \mathbb{R}_n[x]$, zato je $\dim \mathbb{R}_n[x] = n+1$.□

Opomba 2.12 V tem učbeniku bomo obravnavali samo vektorske prostore, ki imajo kočno bazo in torej končno dimenzijo. Obstajajo tudi vektorski prostori, ki nimajo končne baze, npr. $V = \mathbb{R}[x]$ ali $\mathcal{C}(\mathbb{R})$. ◊

Naj bo $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ baza vektorskega prostora V. Potem ima vsak vektor iz V razvoj po bazi $\mathcal{B}$. Če je $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i$, potem vektor $\mathbf{u}$ predstavimo z n-terico $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$. V tem primeru bomo pisali $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ in tako vektorski prostor V enačili kar z vektorskim prostorom $\mathbb{R}^n$. Pri tem pa ne smemo pozabiti, da je ta identifikacija odvisna od izbire baze $\mathcal{B}$. Če izberemo drugo bazo, imajo vsaj nekateri vektorji drugačen razvoj po bazi in dobimo drugačno identifikacijo med V in $\mathbb{R}^n$.

Trditev 2.13 *Če je $U = \mathscr{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_l)$ neničeln vektorski podprostor v V, potem v množici $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_l\}$ obstaja podmnožica, ki je baza za U.*

Dokaz Iz množice $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_l\}$ najprej izločimo vse vektorje, ki so enaki $\mathbf{0}$. Preostale vektorje označimo z $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$. Recimo, da je j največji tak indeks, da so $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_j$ linearno neodvisni. Ker je $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, je gotovo $j \geq 1$. Če je $j = k$, so $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ linearno neodvisni in zato baza za U. Če pa je $j < k$, so vektorji $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{j+1}$ linearno odvisni. Torej je $\sum_{i=1}^{j+1} \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ za neke skalarje $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{j+1}$, ki niso vsi enaki 0. Ker so $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_j$ linearno neodvisni, mora biti $\alpha_{j+1} \neq 0$. Naj bo

$$\beta_i = -\frac{\alpha_i}{\alpha_{j+1}} \quad \text{za } i = 1, 2, \ldots, j \ .$$

Potem je

$$\mathbf{v}_{j+1} = \sum_{i=1}^{j} \left(-\frac{\alpha_i}{\alpha_{j+1}}\right) \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{j} \beta_i \mathbf{v}_i \ .$$

Zato je $\mathbf{v}_{j+1}$ linearna kombinacija vektorjev $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_j$ in velja

$$U = \mathscr{L}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_{j+2}, \ldots, \mathbf{v}_k) \ .$$

Postopek nadaljujemo tako, da vektorje $\mathbf{v}_i$, $i = j+2, \ldots$ postopoma izločimo, če so linearna kombinacija vektorjev z nižjimi indeksi. Ker imamo končno mnogo vektorjev, nam na koncu ostane množica $\mathscr{C} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_j, \ldots\}$, ki je linearno neodvisna in zanjo velja $U = \mathscr{L}(\mathscr{C})$. Torej je $\mathscr{C}$ baza za U. ■

Zgled 2.14 V množici $\mathscr{M} = \{1, 1+x, 0, 1-x, 1+x+x^2, 1-x^2\}$ poiščimo kako bazo za $U = \mathscr{L}(\mathscr{M}) \subseteq \mathbb{R}_2[x]$. Najprej izločimo polinom 0. Tako dobimo $\mathscr{M}_1 = \{1, 1+x, 1-x, 1+x+x^2, 1-x^2\}$. Polinoma 1 in $1+x$ sta linearno neodvisna, velja pa

$$(1-x) + (1+x) - 2 \cdot 1 = 0 \ .$$

Zato polinom $1-x$ izločimo. Polinomi $1, 1+x, 1+x+x^2$ so linearno neodvisni, polinom $1-x^2$ pa izločimo, saj je

$$1 - x^2 = (-1)(1+x+x^2) + (1+x) + 1 \ .$$

Baza za U je $\{1, 1+x, 1+x+x^2\}$. Opazimo, da je $U = \mathbb{R}_2[x]$. □

Izrek 2.15 *Če je množica vektorjev $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_l\}$ linearno neodvisna, potem v V obstajajo taki vektorji $\mathbf{u}_{l+1}, \mathbf{u}_{l+2}, \ldots, \mathbf{u}_n$, da je $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ baza za V. Z drugimi besedami, linearno neodvisno podmnožico v V lahko dopolnimo do baze prostora V.*

Dokaz Naj bo $U = \mathscr{L}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_l)$. Potem je U vektorski podprostor v V in $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_l\}$ baza za U. Če je $U = V$, je $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_l\}$ že baza za V. Sicer pa je $U \subsetneq V$ in lahko najdemo tak vektor $\mathbf{u}_{l+1} \in V$, da je $\mathbf{u}_{l+1} \notin U$. Denimo, da je $\sum_{i=1}^{l+1} \alpha_i \mathbf{u}_i = \mathbf{0}$. Ker je $\mathbf{u}_{l+1} \notin U$, iz zveze $\alpha_{l+1}\mathbf{u}_{l+1} = -\sum_{i=1}^{l} \alpha_i \mathbf{u}_i \in U$ sledi $\alpha_{l+1} = 0$. Ker so vektorji v množici $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_l\}$ linearno neodvisni, je tudi $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_l = 0$. Torej je $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{l+1}\}$ linearno neodvisna. Naj bo $U_1 = \mathscr{L}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{l+1})$. Če je $U_1 = V$, smo končali, sicer pa postopek nadaljujemo. Ker je V končno razsežen in ker imajo vse baze za V enako moč, se postopek konča v končno korakih. ■

Zgled 2.16 Naj bo $U \subseteq \mathbb{R}^3$ ravnina podana z enačbo $x + y - 2z = 0$. Dopolnimo vektor $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in U$ najprej do baze za U in nato še do baze za $\mathbb{R}^3$. Označimo $U_1 = \mathscr{L}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix} 2\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} ; \alpha \in \mathbb{R}\right\}$. Za vektor $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ velja $\mathbf{u}_2 \in U$ in $\mathbf{u}_2 \notin U_1$. Potem je $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ baza za U. Opazimo, da vektor $\mathbf{u}_2$ lahko izberemo na neskončno mnogo načinov. Vzeli bi lahko npr. tudi vektorje $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ali pa $\begin{bmatrix} 2\,\mathrm{e} \\ 2\pi \\ \mathrm{e} + \pi \end{bmatrix}$. Za tretji vektor v bazi $\mathbb{R}^3$ izberemo npr. vektor $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Ker velja $\mathbf{u}_3 \notin U$, sklepamo, da je $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ baza za $\mathbb{R}^3$. □

Posledica 2.17 *Če je $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_l\}$ baza vektorskega prostora $U \subseteq V$, potem jo lahko dopolnimo do baze $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ za V.*

Posledica 2.18 *Če je $U \subseteq V$, potem je $\dim U \leq \dim V$. Enakost $\dim U = \dim V$ velja natanko tedaj, ko je $U = V$.*

Posledica 2.19 *Če je $\dim U = l$, je vsaka podmnožica v U, ki vsebuje vsaj $l + 1$ vektorjev, linearno odvisna.*

Izrek 2.20 *Naj bosta U_1 in U_2 vektorska podprostora v V. Potem je njun presek $U_1 \cap U_2$ tudi vektorski podprostor v V.*

Dokaz Naj bosta $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U_1 \cap U_2$ in $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$. Potem je $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} \in U_1$, saj sta $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$ v U_1 in $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} \in U_2$, saj sta $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$ tudi v U_2. Torej je $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} \in U_1 \cap U_2$. ■

Posledica 2.21 *Če so $U_1, U_2, \dots, U_k$ vektorski podprostori v V, je tudi presek $\bigcap_{i=1}^{k} U_i$ vektorski podprostor v V.*

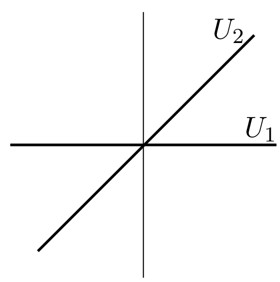
Posledico dokažemo z indukcijo na k.

Zgled 2.22 Naj bo $V = \mathbb{R}^3$, U_1 ravnina z enačbo $x+y-2z=0$ in U_2 ravnina z enačbo $x+y-z=0$. Ker sta U_1 in U_2 različni nevzporedni ravnini v $\mathbb{R}^3$, vemo iz prvega poglavja, da je njun presek premica. Ker je $\mathbf{0}$ element obeh ravnin U_1 in U_2, sta to dva vektorska podprostora v V. Smerni vektor premice $U_1 \cap U_2$ je

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad .$$

Zato je $U_1 \cap U_2 = \mathscr{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$. □

Zgled 2.23 Unija dveh vektorskih podprostorov ni nujno vektorski podprostor. Če v $\mathbb{R}^2$ vzamemo $U_1 = \mathscr{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ in $U_2 = \mathscr{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$, potem je $U_1 \cup U_2 \neq \mathbb{R}^2$, ki je edini podprostor v $\mathbb{R}^2$ večji od ene premice skozi izhodišče.



□

Z enostavnim premislekom se prepričamo, da je unija $U_1 \cup U_2$ vektorski podprostor natanko tedaj, ko je bodisi $U_1 \subset U_2$ bodisi $U_2 \subset U_1$.

Definicija 2.24 Naj bosta U_1 in U_2 vektorska podprostora v V. Potem množico vsot $\{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \; ; \; \mathbf{u}_1 \in U_1, \mathbf{u}_2 \in U_2\}$ imenujemo *vsota* vektorskih podprostorov U_1 in U_2. Označimo jo z $U_1 + U_2$. ♢

Izrek 2.25 *Vsota $U_1 + U_2$ je vektorski podprostor.*

Dokaz Naj bosta $\mathbf{u}$ in $\mathbf{v}$ iz $U_1 + U_2$. Potem je $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ in $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ za neke $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1 \in U_1$ in $\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2 \in U_2$. Izberimo še skalarja α in β. Potem je

$$\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} = \alpha(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + \beta(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = (\alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{v}_1) + (\alpha\mathbf{u}_2 + \beta\mathbf{v}_2) \quad .$$

Ker je $\alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{v}_1 \in U_1$ in $\alpha\mathbf{u}_2 + \beta\mathbf{v}_2 \in U_2$, je $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} \in U_1 + U_2$. ■

Zgled 2.26 Premislimo, kaj je vsota vektorskih podprostorov $U_1 = \mathscr{L}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)$ in $U_2 = \mathscr{L}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)$ v $\mathbb{R}^2$. Velja $U_1 + U_2 = \mathbb{R}^2$, saj je $\mathscr{B} = \left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}$ baza za $\mathbb{R}^2$ in je $\mathscr{B} \subseteq U_1 + U_2$. □

Izrek 2.27 *Če sta U_1 in U_2 vektorska podprostora v V, potem velja*

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2) \ .$$

Dokaz Naj bo $\mathscr{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_l\}$ baza za $U_1 \cap U_2$. Potem jo lahko dopolnimo do baze

$$\mathscr{C}_1 = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_l, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$$

za U_1 in do baze

$$\mathscr{C}_2 = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_l, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_s\}$$

za U_2. Želimo preveriti, da je $\mathscr{D} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_l, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_s\}$ baza za $U_1 + U_2$.

Izberimo vektorja $\mathbf{z}_1 \in U_1$ in $\mathbf{z}_2 \in U_2$. Potem je $\mathbf{z}_1 = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^{r} \beta_j \mathbf{v}_j$ in $\mathbf{z}_2 = \sum_{i=1}^{l} \gamma_i \mathbf{v}_i + \sum_{k=1}^{s} \delta_k \mathbf{w}_k$ za neke skalarje α_i, β_j, γ_i, δ_k. Zato je

$$\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 = \sum_{i=1}^{l} (\alpha_i + \gamma_i)\mathbf{v}_i + \sum_{j=1}^{r} \beta_j \mathbf{u}_j + \sum_{k=1}^{s} \delta_k \mathbf{w}_k.$$

Torej velja $\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 \in \mathscr{L}(\mathscr{D})$, oziroma $U_1 + U_2 \subseteq \mathscr{L}(\mathscr{D})$. Ker je $\mathscr{D} \subseteq U_1 + U_2$, mora biti $U_1 + U_2 = \mathscr{L}(\mathscr{D})$. Preveriti moramo še, da so vektorji iz $\mathscr{D}$ linearno neodvisni. Naj bo torej

$$\sum_{i=1}^{l} \alpha_i \mathbf{v}_i + \sum_{j=1}^{r} \beta_j \mathbf{u}_j + \sum_{k=1}^{s} \gamma_k \mathbf{w}_k = \mathbf{0} \ .$$

Potem je

$$-\sum_{k=1}^{s} \gamma_k \mathbf{w}_k = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \mathbf{v}_i + \sum_{j=1}^{r} \beta_j \mathbf{u}_j \in U_1 \cap U_2 \ .$$

Ker je $\mathcal{B}$ baza za presek $U_1 \cap U_2$, je

$$-\sum_{k=1}^{s} \gamma_k \mathbf{w}_k = \sum_{j=1}^{r} \varphi_j \mathbf{u}_j$$

oziroma,

$$\sum_{k=1}^{s} \gamma_k \mathbf{w}_k + \sum_{j=1}^{r} \varphi_j \mathbf{u}_j = \mathbf{0}$$

za neke skalarje φ_j. Ker je $\mathscr{C}_2$ baza za U_2, mora biti $\gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_s = 0$ in $\varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = \varphi_r = 0$. Iz tega sledi

$$\sum_{i=1}^{l} \alpha_i \mathbf{v}_i + \sum_{j=1}^{r} \beta_j \mathbf{u}_j = \mathbf{0}.$$

Ker je $\mathscr{C}_1$ baza, je $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_l = \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_r = 0$. Zato je množica $\mathscr{D}$ linearno neodvisna in tako baza za $U_1 + U_2$. Potem je

$$\dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2) = l+r+l+s-l = l+r+s = \dim(U_1+U_2)\ . \ \blacksquare$$

Zgled 2.28 Imamo vektorje $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ v $\mathbb{R}^3$. Naj bo $U_1 = \mathscr{L}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ in $U_2 = \mathscr{L}(\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4)$. Poiščimo dimenzijo preseka $U_1 \cap U_2$.

Velja $\dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 + U_2)$. Vektorja $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ sta linearno neodvisna, zato je $\dim U_1 = 2$. Pravtako sta vektorja $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ linearno neodvisna, zato je tudi $\dim U_2 = 2$. Vektorji $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4\}$ so baza za $\mathbb{R}^3$, zato je $U_1 + U_2 = \mathbb{R}^3$. Potem je

$$\dim(U_1 \cap U_2) = 2 + 2 - 3 = 1\ .$$

Poiščimo še bazo za $U_1 \cap U_2$. Za $\mathbf{u} \in U_1 \cap U_2$ velja $\mathbf{u} = \alpha \mathbf{u}_1 + \beta \mathbf{u}_2 = \gamma \mathbf{u}_3 + \delta \mathbf{u}_4$ za neke skalarje $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Od tod dobimo $\alpha = 2\gamma$, $2\beta = 2\gamma$, $\alpha - \beta = \gamma + \delta$. Vzemimo $\gamma = 1$. Potem je $\alpha = 2$, $\beta = 1$ in $\delta = 0$. Tako smo pokazali, da je $\mathbf{u}_3 \in U_1 \cap U_2$ in zato je $\{\mathbf{u}_3\}$ baza za $U_1 \cap U_2$. $\square$

Definicija 2.29 Če sta U_1 in U_2 dva vektorska podprostora v V in zanju velja $U_1 \cap U_2 = \mathbf{0}$, potem vsoto $U_1 + U_2$ imenujemo *direktna vsota* in jo označimo z $U_1 \oplus U_2$. $\Diamond$

Posledica 2.30 *Za direktno vsoto velja*

$$\dim(U_1 \oplus U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 \ .$$

Izrek 2.31 *Naj bo $W = U_1 \oplus U_2$. Potem vsak vektor $\mathbf{w} \in W$ lahko na en sam način izrazimo kot vsoto $\mathbf{w} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, kjer je $\mathbf{u}_1 \in U_1$ in $\mathbf{u}_2 \in U_2$.*

Dokaz Ker je $W = U_1 \oplus U_2$, lahko vsak vektor $\mathbf{w}$ izrazimo kot vsoto $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ za neka $\mathbf{u}_1 \in U_1$ in $\mathbf{u}_2 \in U_2$. Denimo, da je $\mathbf{w} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ in $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ za neke vektorje $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1 \in U_1$ in $\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2 \in U_2$. Potem je

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \quad \text{in zato je} \\ \mathbf{z} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{v}_1 &= \mathbf{v}_2 - \mathbf{u}_2 \ . \end{aligned}$$

Vektor $\mathbf{z}$ je v preseku $U_1 \cap U_2$. Ker je $U_1 \cap U_2 = \mathbf{0}$, je $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ in zato je $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$ in $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2$. ■

3 Prehod na novo bazo

V vektorskem prostoru V imamo dve bazi $\mathscr{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ in $\mathscr{C} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Denimo, da poznamo razvoj vektorjev iz V po bazi $\mathscr{B}$, ki jo imenujemo stara baza. Kako potem izračunamo razvoj vektorjev iz V po bazi $\mathscr{C}$? To bazo imenujemo nova baza.

Za $\mathbf{v} \in V$ naj bo

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{u}_j \tag{VI.2}$$

razvoj po bazi $\mathscr{B}$ in

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{v}_i \tag{VI.3}$$

razvoj po bazi $\mathscr{C}$.

Sedaj pa razvijmo vektorje iz baze $\mathscr{B}$ po bazi $\mathscr{C}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \sum_{i=1}^{n} \gamma_{i1} \mathbf{v}_i \\ \mathbf{u}_2 &= \sum_{i=1}^{n} \gamma_{i2} \mathbf{v}_i \\ &\vdots \\ \mathbf{u}_n &= \sum_{i=1}^{n} \gamma_{in} \mathbf{v}_i \, . \end{aligned}$$

Te enakosti vstavimo v (VI.2), upoštevamo (VI.3) in dobimo

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \alpha_j \right) \mathbf{v}_i \,.$$

Ker so koeficienti v razvoju vektorja po bazi enolično določeni, mora biti

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \alpha_j \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n \,. \tag{VI.4}$$

Označimo

$$\mathbf{v}_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{v}_{\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad P_{\mathscr{B}\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} \end{bmatrix} .$$

Enakosti (VI.4) zapišemo v matrični obliki kot

$$\mathbf{v}_{\mathscr{C}} = P_{\mathscr{B}\mathscr{C}} \mathbf{v}_{\mathscr{B}} \,.$$

Povedano z besedami: vektor koeficientov razvoja vektorja $\mathbf{v}$ po novi bazi dobimo tako, da vektor koeficientov razvoja po stari bazi pomnožimo z matriko $P_{\mathscr{B}\mathscr{C}}$. Matriko $P_{\mathscr{B}\mathscr{C}}$ imenujemo *prehodna matrika* med bazama $\mathscr{B}$ in $\mathscr{C}$. Opazimo, da so koeficienti v j-tem stolpcu prehodne matrike $P_{\mathscr{B}\mathscr{C}}$ ravno koeficienti razvoja vektorja $\mathbf{u}_j$ po bazi $\mathscr{C}$.

Zgled 3.1 Poiščimo razvoj polinoma $p(x) = 1 + 2x + 3x^2$ glede na bazo

$$\mathscr{C} = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2\}.$$

Za staro bazo vzemimo standardno bazo $\mathscr{B} = \{1, x, x^2\}$. Prehodno matriko $P_{\mathscr{B}\mathscr{C}}$ poiščemo tako, da razvijemo elemente iz baze $\mathscr{B}$ po bazi $\mathscr{C}$:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot (1 + x) + 0 \cdot (1 + x + x^2) \\ x &= (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (1 + x) + 0 \cdot (1 + x + x^2) \\ x^2 &= 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (1 + x) + 1 \cdot (1 + x + x^2) \,. \end{aligned}$$

Tako je

$$P_{\mathscr{B}\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Vektor koeficientov razvoja p po bazi $\mathscr{B}$ je

$$p_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Torej je

$$p_{\mathscr{C}} = P_{\mathscr{B}\mathscr{C}} p_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Razvoj polinoma p po bazi $\mathscr{C}$ je

$$p(x) = (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot (1 + x) + 3(1 + x + x^2). \qquad \square$$

Izrek 3.2 *Prehodna matrika $P_{\mathscr{B}\mathscr{C}}$ je obrnljiva.*

Dokaz Matrika $P_{\mathscr{B}\mathscr{C}}$ je kvadratna. Obrnljiva je natanko tedaj, ko ima homogen sistem enačb $P_{\mathscr{B}\mathscr{C}} \mathbf{v}_{\mathscr{B}} = \mathbf{0}$ eno samo rešitev $\mathbf{v}_{\mathscr{B}} = \mathbf{0}$. Označimo $\mathbf{v}_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$. Ker je $\mathbf{v}_{\mathscr{C}} = 0$, je

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{u}_j = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \mathbf{v}_i = 0.$$

Vektorji $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ so linearno neodvisni, zato je $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. Torej je $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ in matrika $P_{\mathscr{B}\mathscr{C}}$ je obrnljiva. ■

Trditev 3.3 *Če je $P_{\mathscr{B}\mathscr{C}}$ prehodna matrika iz baze $\mathscr{B}$ v bazo $\mathscr{C}$, potem je $P_{\mathscr{B}\mathscr{C}}^{-1}$ prehodna matrika iz baze $\mathscr{C}$ v bazo $\mathscr{B}$.*

Dokaz Za matriko $P_{\mathscr{B}\mathscr{C}}$ velja

$$\mathbf{u}_{\mathscr{C}} = P_{\mathscr{B}\mathscr{C}} \mathbf{u}_{\mathscr{B}}.$$

Ker je $P_{\mathscr{B}\mathscr{C}}$ obrnljiva, nam množenje s $P_{\mathscr{B}\mathscr{C}}^{-1}$ z leve da

$$P_{\mathscr{B}\mathscr{C}}^{-1} \mathbf{u}_{\mathscr{C}} = \mathbf{u}_{\mathscr{B}}.$$

Torej je prehodna matrike $P_{\mathscr{C}\mathscr{B}}$ enaka $P_{\mathscr{B}\mathscr{C}}^{-1}$. ■

Trditev 3.4 *Če je P_1 prehodna matrika iz baze $\mathscr{B}$ v bazo $\mathscr{C}$ in je P_2 prehodna matrika iz baze $\mathscr{C}$ v bazo $\mathscr{D}$, potem je P_2P_1 prehodna matrika iz baze $\mathscr{B}$ v bazo $\mathscr{D}$.*

Dokaz Za P_1 in P_2 velja

$$\mathbf{u}_{\mathscr{C}} = P_1\mathbf{u}_{\mathscr{B}} \quad \text{in} \quad \mathbf{u}_{\mathscr{D}} = P_2\mathbf{u}_{\mathscr{C}}\,.$$

Potem je

$$\mathbf{u}_{\mathscr{D}} = P_2\mathbf{u}_{\mathscr{C}} = P_2P_1\mathbf{u}_{\mathscr{B}}\,.$$

Torej je produkt P_2P_1 prehodna matrika med bazo $\mathscr{B}$ in bazo $\mathscr{D}$. ■

Zgled 3.5 Razvoj vektorja $\mathbf{u}$ po bazi $\mathscr{B} = \left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right\}$ je $\mathbf{u}_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}$. Poiščimo razvoj tega vektorja po bazi $\mathscr{C} = \left\{\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\}$. Pri tem si bomo pomagali s standardno bazo $\mathscr{S} = \left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$. Prehodna matrika med bazo $\mathscr{B}$ in $\mathscr{S}$ je

$$P_{\mathscr{B}\mathscr{S}} = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$$

in prehodna matrika med bazo $\mathscr{C}$ in bazo $\mathscr{S}$ je

$$P_{\mathscr{C}\mathscr{S}} = \begin{bmatrix}1 & 1\\3 & 2\end{bmatrix}.$$

Prehodna matrika med bazo $\mathscr{B}$ in bazo $\mathscr{C}$ je potem enaka

$$P_{\mathscr{B}\mathscr{C}} = P_{\mathscr{S}\mathscr{C}}P_{\mathscr{B}\mathscr{S}} = P_{\mathscr{C}\mathscr{S}}^{-1}P_{\mathscr{B}\mathscr{S}}\,.$$

Inverz matrike $P_{\mathscr{C}\mathscr{S}}$ je

$$P_{\mathscr{C}\mathscr{S}}^{-1} = \begin{bmatrix}-2 & 1\\3 & -1\end{bmatrix}.$$

Sedaj lahko izračunamo iskano prehodno matriko

$$P_{\mathscr{B}\mathscr{C}} = \begin{bmatrix}-2 & 1\\3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & -3\\2 & 4\end{bmatrix}.$$

Koeficiente razvoja $\mathbf{u}$ po bazi $\mathscr{C}$ dobimo iz zveze

$$\mathbf{u}_{\mathscr{C}} = P_{\mathscr{B}\mathscr{C}}\mathbf{u}_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix}-1 & -3\\2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\-8\end{bmatrix}.$$

Iz povedanega sledi

$$\mathbf{u}_{\mathscr{S}} = \begin{bmatrix}-1\\5\end{bmatrix} = 7\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} - 8\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}.$$ □