Hausdorffova metrika in Blaschkejev izrek

Boris Lavrič

Zaznamujmo z $\mathcal{M}$ množico vseh nepraznih kompaktnih podmnožic prostora $\mathbb{R}^n$. Za vsak par $M, N \in \mathcal{M}$ obstaja tak $\rho \geq 0$, da je $M \subseteq N + B_\rho$ in $N \subseteq M + B_\rho$, kjer je $B_\rho = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \rho\}$. Nenegativno realno število

$$d(M, N) = \inf\{\rho \geq 0 : M \subseteq N + B_\rho, \ \ N \subseteq M + B_\rho\}$$

imenujemo Hausdorffova razdalja med M in N.

Zaradi kompaktnosti množic M in N je infimum celo minimum, torej za $\rho = d(M, N)$ velja $M \subseteq N + B_\rho$ in $N \subseteq M + B_\rho$. Od tod sledi, da je $d(M, N) = 0$ natanko takrat, kadar je $M = N$. Če upoštevamo enakost $B_\rho + B_\tau = B_{\rho+\tau}$ za vsak $\rho > 0$ in $\tau > 0$, brž vidimo, da za d velja trikotniška neenakost. Ker je poleg tega očitno $d(M, N) = d(N, M)$, je d metrika na $\mathcal{M}$. Velja naslednji rezultat.

Izrek 1. *$(\mathcal{M}, d)$ je poln metrični prostor.*

Dokaz (osnovne poteze). Vzemimo poljubno Cauchyjevo zaporedje $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ v $\mathcal{M}$. Tvorimo novo zaporedje $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ s členi

$$N_k = \overline{M_k \cup M_{k+1} \cup M_{k+2} \cup \ldots}$$

in ugotovimo, da je padajoče ter da za vsak k velja $N_k \in \mathcal{M}$. Nato dokažemo, da to zaporedje konvergira v $\mathcal{M}$ k preseku N vseh množic N_k, $k \in \mathbb{N}$. Navsezadnje ugotovimo, da tudi prvotno Cauchyjevo zaporedje $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ konvergira k N. $\square$

Omejenost v metričnem prostoru $(\mathcal{M}, d)$ se da opisati brez Hausdorffove metrike. Podmnožica $\mathcal{N}$ prostora $(\mathcal{M}, d)$ je omejena natanko takrat, kadar obstaja taka krogla v $\mathbb{R}^n$, ki vsebuje vse množice iz $\mathcal{N}$.

Izrek 2. *Iz vsakega omejenega zaporedja v metričnem prostoru $(\mathcal{M}, d)$ lahko izberemo konvergentno podzaporedje.*

Dokaz (osnovne poteze). Naj bo $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ omejeno zaporedje v $\mathcal{M}$. Brez škode za splošnost dokaza smemo predpostaviti, da so vsi členi M_i vsebovani v kocki $[0, 1]^n$. Za vsak $j \in \mathbb{N}$ kocko $[0, 1]^n$ zapišimo kot unijo družine D_j, sestavljene iz 2^{jn} kock z robovi dolžine 2^{-j}. Za vsak $M \in \mathcal{M}$ naj bo j-to pokritje $P_j(M)$ množice M unija vseh kock iz D_j, ki imajo neprazen presek z M. Ker ima družina D_1 končno elementov (2^n kock), je število vseh 1-pokritij množic iz $\mathcal{M}$ končno, zato zaporedje $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ vsebuje podzaporedje $(M_i^1)_{i\in\mathbb{N}}$ z istim 1-pokritjem $P_1 = P_1(M_i^1)$ za vsak člen M_i^1. Podobno obstaja podzaporedje $(M_i^2)_{i\in\mathbb{N}}$ zaporedja $(M_i^1)_{i\in\mathbb{N}}$ z istim 2-pokritjem $P_2 = P_2(M_i^2)$ za vsak člen M_i^2. Tako nadaljujemo in dobimo nadaljnja podzaporedja $(M_i^j)_{i\in\mathbb{N}}$ in j-pokritja P_j, za katera velja $P_j = P_j(M_i^j)$ za vsak i. Nato izberemo diagonalno podzaporedje $(M_k^k)_{k\in\mathbb{N}}$ in dokažemo, da je Cauchyjevo in zaradi polnosti metričnega prostora $\mathcal{M}$ konvergentno. $\square$

Posledica. *Vsaka zaprta omejena podmnožica metričnega prostora* $(\mathcal{M}, d)$ *je kompaktna.*

Zaznamujmo s $\mathcal{K}$ množico vseh nepraznih konveksnih kompaktnih podmnožic prostora $\mathbb{R}^n$.

Trditev. $\mathcal{K}$ *je zaprta podmnožica metričnega prostora* $(\mathcal{M}, d)$.

Dokaz (osnovne poteze). Trdimo, da je razlika $\mathcal{M} \setminus \mathcal{K}$ odprta v $\mathcal{M}$. Vzemimo $M \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{K}$. Ker M ni konveksna, obstaja daljica s krajiščema v M, ki ima vsaj eno točko x zunaj M. Ker je M zaprta je zunaj M tudi dovolj majhna krogla $B_\delta(x)$ prostora $\mathbb{R}^n$. Od tod sledi, da nobena množica $N \in \mathcal{M}$, ki ustreza pogoju $d(M, N) < \frac{1}{2}\delta$, ni konveksna. $\square$

Z uporabo te trditve in izreka 2 dobimo Blaschkejev izrek o selekciji:

Izrek 3. *Iz vsakega omejenega zaporedja nepraznih konveksnih kompaktnih podmnožic prostora* $\mathbb{R}^n$ *lahko izberemo podzaporedje, ki v Hausdorffovi metriki konvergira k neprazni konveksni kompaktni množici.*

Za primer uporabe Blaschkejevega izreka si oglejmo pojma včrtane in očrtane krogle. Naj bo K kompaktna podmnožica prostora $\mathbb{R}^n$. Množica polmerov $\rho \geq 0$ vseh krogel $B_\rho(x)$, vsebovanih v K, je omejena, zato ima supremum ρ_K. Torej obstaja tako zaporedje krogel, vsebovanih v K, da njihovi polmeri konvergirajo k ρ_K. To zaporedje krogel po Blaschkejevem izreku vsebuje konvergentno podzaporedje. Njegova limita je krogla s polmerom ρ_K, ki ji pravimo včrtana krogla množice K. Včrtana krogla ni enolično določena in je v primeru $\rho_K = 0$ točka. Podobno lahko ugotovimo, da obstaja krogla, ki vsebuje K in ima med vsemi takimi kroglami najmanjši polmer. Ta krogla je enolično določena s K in ji pravimo očrtana krogla množice K.

Zabeležimo še izrek o aproksimaciji konveksne kompaktne množice s politopi, ki pove, da je množica politopov gosta v metričnem prostoru $(\mathcal{K}, d)$.

Izrek 4. *Naj bo K neprazna konveksna kompaktna podmnožica prostora $\mathbb{R}^n$. Za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak politop $P \subseteq K$, da je $d(P, K) < \epsilon$.*

Dokaz. Naj bo $\mathcal{P}$ končno pokritje množice K s kroglami polmera ϵ, ki imajo središča v točkah $x_1, x_2, \ldots, x_m \in K$. Potem je politop $P = \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_m\}$ vsebovan v K in zadošča pogoju $d(P, K) < \epsilon$. $\square$

Naloge.

1. Dokaži, da za $a \in \mathbb{R}^n$ in $N \in \mathcal{M}$ velja $d(\{a\}, N) = \max_{x \in N} \|a - x\|$.

2. Dokaži, da za vsak par $M, N \in \mathcal{M}$ velja $M \subseteq N + B_\rho$ in $N \subseteq M + B_\rho$, kjer je $\rho = d(M, N)$.

3. Izračunaj Hausdorffovo razdaljo $d(K_a, K_b)$ med kvadratoma $K_a = [0, a]^2$ in $K_b = [0, b]^2$ ravnine $\mathbb{R}^2$, kjer je $a > 0$ in $b > 0$.

4. Dokaži, da za vsak par $M, N \in \mathcal{M}$ velja formula
$$d(M, N) = \max\{\sup_{x \in M} \inf_{y \in N} \|x - y\|, \sup_{x \in N} \inf_{y \in M} \|x - y\|\}.$$

5. Naj bo $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$ padajoče zaporedje nepraznih kompaktnih podmnožic prostora $\mathbb{R}^n$ in M njihov presek. Dokaži, da v prostoru $\mathcal{M}$ velja $\lim_{i \to \infty} M_i = M$.

6. Dokaži, da je podmnožica $\mathcal{N}$ prostora $(\mathcal{M}, d)$ omejena natanko takrat, kadar je unija vseh množic iz $\mathcal{N}$ omejena v prostoru $\mathbb{R}^n$.

7. Izračunaj Hausdorffovo razdaljo $d(B_\rho(x), B_\tau(y))$ med kroglama v $\mathbb{R}^n$ in dokaži, da konvergentno zaporedje krogel $(B_{\rho_i}(x_i))_{i \in \mathbb{N}}$ konvergira h krogli ali točki.

8. Dokaži, da ima kocka $K = [0, 1]^n$ v $\mathbb{R}^n$ eno samo včrtano kroglo B in poišči Hausdorffovo razdaljo $d(K, B)$.

9. Dokaži, da ima vsaka neprazna konveksna kompaktna podmnožica prostora $\mathbb{R}^n$ natanko eno očrtano kroglo in izračunaj polmer r_K očrtane krogle kocke $K = [0, 1]^n$.