

Teoretični del izpita iz matematike II za študente IŠRM, 22. 6. 2018

1. (i) Kako je definiran gradient funkcije in kaj pove ?

(ii) Planinec se vzpenja na goro, katere višina je $z = 1000 - x^2 - 3y^2$. V kateri smeri se mora odpraviti iz točke $(10, 10, 600)$, da se bo najhitreje dvigoval?

2. Določite tisto rešitev enačbe $y' = y + f(x)$, ki zadošča pogoju $y(0) = 1$. Pokažite, da je ta rešitev pozitivna na poltraku $[0, \infty)$, če je funkcija f pozitivna.

3. Vsota dveh partikularnih rešitev enačbe $y'' + xy' + q(x)y = 0$ je 1. Določi q in vse rešitve te enačbe.

4. (i) Kdaj imenujemo podmnožico $M \subseteq \mathbb{R}^n$ kompaktno? Kako so (s Heine-Borelovim izrekom) karakterizirane take množice?

(ii) Naj bo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ taka zvezna funkcija, da je $\lim_{\|\vec{x}\| \rightarrow \infty} f(\vec{x}) = 0$. Pokažite, da je f omejena funkcija (torej, da je njena zaloga vrednosti vsebovana v kakem končnem intervalu).