

VEČKRATNI IN KRIVULJNI INTEGRALI

BOJAN MAGAJNA

KAZALO

Uvod	1
1. Parametrično podane krivulje	3
2. Krivulje v polarnih koordinatah	8
3. Ploskve	12
3.1. Ploskve v $\mathbb{R}^3$	12
3.2. Parametrično podane ploskve	13
4. Integrali s parametrom	17
5. Izlimitirani integrali s parametrom	18
6. Dvojni in dvakratni integrali	19
7. Integriranje in odvajanje izlimitiranih integralov s parametrom	23
8. Večkratni integrali	27
9. Računanje integralov v polarnih koordinatah	33
9.1. Polarne koordinate	33
10. Cilindrične ali valjne koordinate	35
11. Sferične koordinate	39
12. Splošne koordinate	42
13. Površina ploskve in ploskovni integral skalarne funkcije	50
14. Krivuljni integrali	53
14.1. Krivuljni integral skalarne funkcije	54
14.2. Krivuljni integral vektorske funkcije	54
14.3. Krivuljni integral potencialnega polja	57
15. Povezava med krivuljnim in dvojnim integralom	60
16. Pretok vektorskega polja	63
16.1. Povezava med krivuljnim in ploskovnim integralom	64
16.2. Povezava med trojnim in ploskovnim integralom	66
Literatura	70

UVOD

Ta tekst je nekoliko razširjena vsebina prvega dela predmeta analiza 3 za študente finančne matematike. Poleg predavane snovi vsebuje še ploskovne integrale in nekaj vektorske analize. Druga snov predmeta, tj. diferencialne enačbe, metrični prostori in kompleksna analiza (vključno z Eulerjevima funkcijama gama in beta) ni zajeta

v tukajšnjem tekstu, ker je že vsebovana npr. v [3] ali [4]. Ta tekst ni bil recenziran in tudi slike potrebujejo precej popravkov.

November 2020

B. M.

1. PARAMETRIČNO PODANE KRIVULJE

Zamislimo si gibajočo se točko v prostoru $\mathbb{R}^3$. Njen krajevni vektor $\vec{r} = (x, y, z)$ je funkcija časa t , kar zapišemo kot

$$(1.1) \quad \vec{r} = \vec{r}(t)$$

oziroma po koordinatah

$$(1.2) \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Točka pri gibanju opiše krivuljo, zato enačba oblike (1.1) ali (1.2) običajno predstavlja krivuljo; pravimo da je krivulja podana *parametrično*. Pri tem parameter t ni nujno čas in lahko teče po celi realni osi $\mathbb{R}$ ali kakem njenem delu (npr. intervalu ali poltraku).

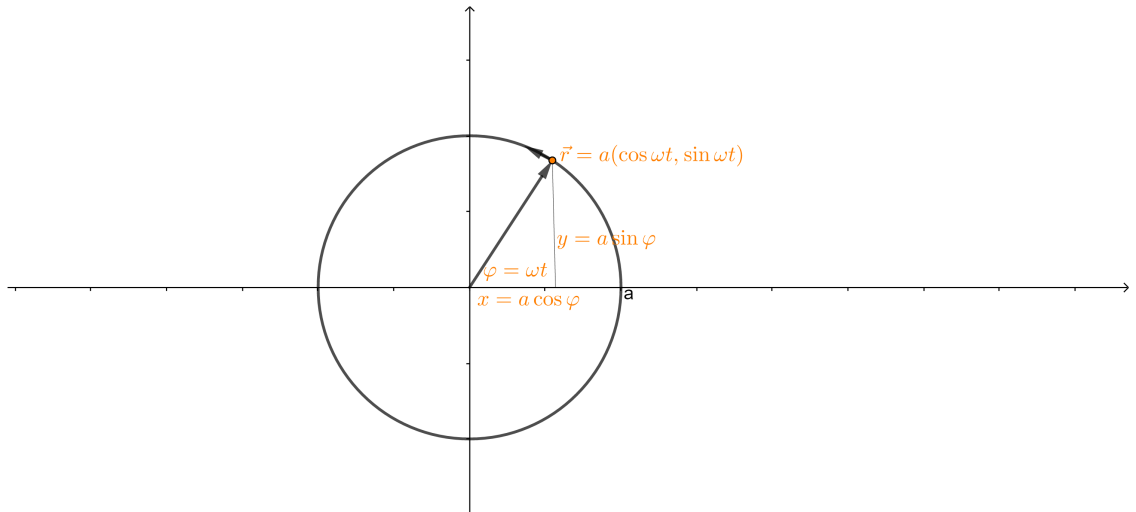
Zgled 1.1. (i) Že iz linearne algebre poznamo enačbo premice s smernim vektorjem $\vec{s}$ skozi točko $\vec{r}_0$:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

(ii) Enačba

$$\vec{r} = a(\cos(\omega t), \sin(\omega t)) \quad (t \in \mathbb{R})$$

oziroma $x = a \cos(\omega t)$, $y = a \sin(\omega t)$, predstavlja krožnico s središčem v $(0, 0)$ in polmerom a , če je $a > 0$ konstanta (in sicer za vsako konstanto $\omega \neq 0$). Vsako točko na taki krožnici lahko namreč v polarnih koordinatah izrazimo kot $x = a \cos \varphi$, $y = a \sin \varphi$. Če vzamemo, da točka potuje enakomerno po krožnici s kotno hitrostjo ω , se kot φ spreminja s časom t kot $\varphi = \omega t$, če privzamemo, da je v času $t = 0$ kot φ enak 0. Ker smo dopustili, da t teče po celi realni osi $\mathbb{R}$, točka prepotuje krožnico neskončno krat. Vidimo, da se da isto krivuljo podati parametrično na različne načine.



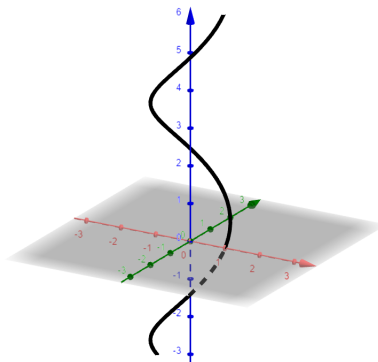
SLIKA 1. Krožnica

Naloga. Kaj pove o smeri kroženja točke predznak od ω ?

(iii) Enačba

$$\vec{r} = (a \cos t, a \sin t, bt) \quad (t \in \mathbb{R}),$$

kjer sta a in b (recimo pozitivni) konstanti, predstavlja vijačnico.



SLIKA 2. Vijačnica

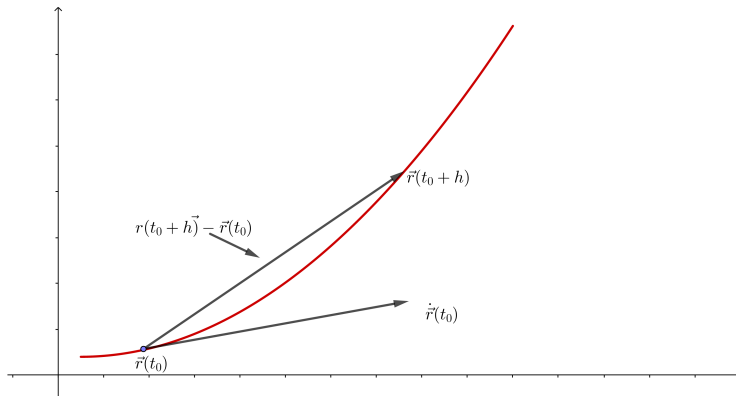
Če namreč katerokoli točko na tej krivulji projiciramo na ravnino x, y , dobimo točko $(a \cos t, a \sin t, 0)$, za katero vemo iz prejšnjega zglada, da leži na krožnici s polmerom a okrog izhodišča v ravnini x, y . Ko t teče, se torej projekcija točke iz naše krivulje na ravnino x, y giblje po krožnici, a hkrati se koordinata z točke na krivulji enakomerno spreminja kot $z = bt$. Ta vijačnica leži na plašču valja $x^2 + y^2 = a^2$. (V ravnini x, y predstavlja zadnja enačba krožnico, toda v prostoru imamo v vsaki vodoravni ravnini $z = \text{konst.}$ eno tako krožnico in vse take krožnice skupaj sestavljajo plašč neskončnega valja, katerega os je os z .)

Kako bi poiskali tangentni vektor na krivuljo z enačbo $\vec{r} = \vec{r}(t)$ v točki $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$? Za dve točki $\vec{r}(t_0)$ in $\vec{r}(t)$ na krivulji, je vektor $\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)$ na sekanti, vendar gre proti 0, ko gre t proti t_0 (kadar je funkcija $t \mapsto \vec{r}(t)$ zvezna). Toda tudi vektor

$$\frac{1}{t - t_0}(\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0))$$

leži na sekanti, in ko se t blizu k t_0 , se njegova smer približuje smeri tangente. Torej bomo za tangentni vektor v točki $\vec{r}(t_0)$ lahko vzeli kar

$$\dot{\vec{r}}(t_0) := \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{t - t_0}(\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)),$$



SLIKA 3. Tangentni vektor kot limita sekantnih

če je le $\dot{\vec{r}}(t_0) \neq 0$. Opazimo, da lahko tukaj *odvod vektorske funkcije* $\vec{r}$ računamo kar po komponentah. Če namreč označimo $h = t - t_0$, imamo

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}(t_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (x(t_0 + h) - x(t_0), y(t_0 + h) - y(t_0), z(t_0 + h) - z(t_0)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h}, \frac{y(t_0 + h) - y(t_0)}{h}, \frac{z(t_0 + h) - z(t_0)}{h} \right),\end{aligned}$$

torej velja:

Trditev 1.2. Če je $\vec{r}$ odvedljiva vektorska funkcija (kar po definiciji pomeni, da so njene komponente x , y in z odvedljive funkcije spremenljivke t), potem je

$$\dot{\vec{r}}(t_0) = (\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{z}(t_0))$$

tangentni vektor na krivuljo $t \mapsto \vec{r}(t)$ v točki $\vec{r}(t_0)$ (če je različen od 0).

Zgled 1.3. Tangentni vektor na vijačnico $\vec{r} = (a \cos t, a \sin t, bt)$ v poljubni točki $\vec{r}(t)$ je

$$\dot{\vec{r}}(t) = (-a \sin t, a \cos t, b).$$

Tangentni vektor v točki $\vec{r}_0 = (a, 0, 0)$ je torej $\dot{\vec{r}}(0) = (0, a, b)$.

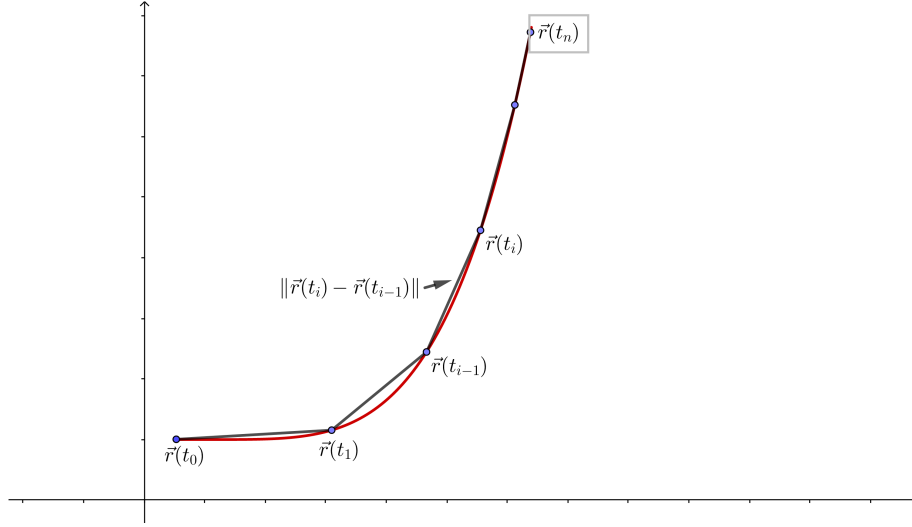
Oglejmo si še, kako izračunamo dolžino krivulje z enačbo

$$(1.3) \quad \vec{r} = \vec{r}(t), \quad (t \in [a, b]),$$

kjer bomo privzeli, da je $\vec{r}$ zvezno odvedljiva funkcija parametra t . (Pri tem odvedljivost v krajiščih a in b pomeni, da tam obstajata desni in levi odvod, zaporedoma.) Interval $[a, b]$ razdelimo na recimo n majhnih podintervalov $[t_{i-1}, t_i]$ z delilnimi točkami

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{i-1} < t_i < \dots < t_n = b.$$

Ko povežemo vsaki dve sosednji točki $\vec{r}(t_{i-1})$ in $\vec{r}(t_i)$ z daljico, dobimo lomljeno črto L , ki se dobro prilega krivulje, če so delilni intervali $[t_{i-1}, t_i]$ dovolj kratki. Dolžina



SLIKA 4. Aproksimacija krivulje z lomljeno črto

daljice med $\vec{r}(t_{i-1})$ in $\vec{r}(t_i)$ je

$$\|\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})\| = \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2 + (z(t_i) - z(t_{i-1}))^2}.$$

Po Lagrangeovem izreku lahko izrazimo $x(t_i) - x(t_{i-1}) = \dot{x}(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$, kjer je $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$. Ko na podoben način izrazimo tudi razliki $y(t_i) - y(t_{i-1})$ in $z(t_i) - z(t_{i-1})$ in označimo $\Delta_i t = t_i - t_{i-1}$, dobimo

$$\|\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})\| = \sqrt{\dot{x}(\xi_i)^2 + \dot{y}(\eta_i)^2 + \dot{z}(\zeta_i)^2} \Delta_i t,$$

kjer je $\xi_i, \eta_i, \zeta_i \in (t_{i-1}, t_i)$. Dolžina celotne lomljene črte L je torej

$$(1.4) \quad s(L) = \sum_{i=1}^n \sqrt{\dot{x}(\xi_i)^2 + \dot{y}(\eta_i)^2 + \dot{z}(\zeta_i)^2} \Delta_i t.$$

Če bi bilo v tej formuli $\zeta_i = \eta_i = \xi_i$, bi bila vsota v (1.4) ravno ena od Riemannovih vsot funkcije $t \mapsto \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} = \|\dot{\vec{r}}(t)\|$ na intervalu $[a, b]$. *Dolžino krivulje*, ki je po definiciji limita dolžin lomljenih črt L , ko gredo širine $\Delta_i t$ proti 0, bi potem lahko dobili kot Riemannov integral $\int_a^b \|\dot{\vec{r}}(t)\| dt$. Pokažimo sedaj, da ta formula velja, čeprav so ξ_i, η_i in ζ_i v splošnem različni. Po predpostavki so namreč funkcije $\dot{x}$, $\dot{y}$ in $\dot{z}$ zvezne, torej enakomerno zvezne na $[a, b]$, zato pri danem $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $|\sqrt{\dot{x}(\xi_i)^2 + \dot{y}(\eta_i)^2 + \dot{z}(\zeta_i)^2} - \sqrt{\dot{x}(\xi_i)^2 + \dot{y}(\xi_i)^2 + \dot{z}(\xi_i)^2}| < \varepsilon$, če so le vse dolžine $\Delta_i t$ pod δ (saj so ξ_i, η_i in ζ_i iz istega intervala $[t_{i-1}, t_i]$). Tedaj je razlika med vsoto (1.4) in Riemannovo vsoto $\sum_{i=1}^n \sqrt{\dot{x}(\xi_i)^2 + \dot{y}(\xi_i)^2 + \dot{z}(\xi_i)^2} \Delta_i t$ po absolutni vrednosti pod

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon \Delta_i t = \varepsilon(b - a).$$

Ker je pri tem ε lahko poljubno majhno pozitivno število, sledi, da konvergirajo vsote (1.4) proti istemu številu kot ustrezne Riemannove vsote (namreč proti $\int_a^b \|\dot{\vec{r}}(t)\| dt$), ko gredo širine delilnih intervalov proti 0. S tem smo dokazali:

Trditev 1.4. Če je $\vec{r}$ zvezno odvedljiva vektorska funkcija na intervalu $[a, b]$ (kjer je $a < b$), potem je dolžina krivulje, ki jo določa, enaka

$$s = \int_a^b \|\dot{\vec{r}}(t)\| dt.$$

Gornji razmislek je zlahka mogoče dopolniti do spoznanja, da trditev velja tudi za funkcije, ki so le odsekoma zvezno odvedljive. Opazimo, da je po gornji formuli dolžina neodvisna od parametrizacije krivulje, saj po izreku o uvedbi nove spremenljivke v določeni integral velja naslednje:

Trditev 1.5. Naj bo $\vec{r}$ zvezno odvedljiva vektorska funkcija, definirana na intervalu $[a, b]$ ($a < b$) in naj bo $\psi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ zvezno odvedljiva bijekcija, tako da $t = \psi(\tau)$ preteče interval $[a, b]$, ko τ preteče interval $[\alpha, \beta]$ (kjer je $\alpha < \beta$). Potem je

$$\int_a^b \|\dot{\vec{r}}(t)\| dt = \int_\alpha^\beta \left\| \frac{d}{d\tau} \vec{r}(\psi(\tau)) \right\| d\tau.$$

Zgled 1.6. Izračunajmo dolžino enega navoja vijačnice $\vec{r} = (a \cos t, a \sin t, bt)$, kjer sta a in b pozitivni konstanti.

En navoj vijačnice dobimo, ko kot t preteče interval dolžine 2π . (Tedad namreč projekcija točke na ravnino x, y enkrat preteče celotno krožnico.) Torej je dolžina enega navoja enaka

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \|\dot{\vec{r}}(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + b^2} dt \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \sqrt{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Naloga. Izračunajte dolžino navoja vijačnice brez uporabe integralov. (Navodilo: prerežite valj, okrog katerega se ovija vijačnica, vzdolž tvorilke in ga razvijte v ravnino, tako da se vijačnica razvije v premico.)

Izberimo na krivulji K z enačbo $\vec{r} = \vec{r}(t)$ začetno točko $\vec{r}(t_0)$. Lega poljubne točke $\vec{r}(t)$ na tej krivulji je določena z razdaljo po krivulji med $\vec{r}(t_0)$ in $\vec{r}(t)$, se pravi z dolžino tistega dela krivulje, ki leži med tema dvema točkama. Ta dolžina je enaka

$$s(t) := \int_{t_0}^t \|\dot{\vec{r}}(u)\| du,$$

kjer smo integracijsko spremenljivko označili z u , saj označuje tukaj t že zgornjo mejo. Če je krivulja na začetku parametrizirana tako, da je vedno $\dot{\vec{r}}(u) \neq 0$, bo po tej formuli s strogo naraščajoča funkcija spremenljivke t (saj je njen odvod $\frac{ds}{dt} = \|\dot{\vec{r}}(t)\| > 0$). Tedaj lahko s vzamemo za nov parameter na krivulji; imenujemo ga *naravni parameter*. Ker je namreč funkcija $t \mapsto s(t)$ strogo naraščajoča, lahko t izrazimo kot funkcijo spremenljivke s , torej $t = t(s)$, in namesto enačbe $\vec{r} = \vec{r}(t)$,

imamo potem enačbo $\vec{r} = \vec{r}(t(s))$, ki podaja krajevni vektor točke na krivulji kot funkcijo parametra s . Seveda je naravni parameter odvisen tudi od izbire začetne točke $\vec{r}(t_0)$, vendar pa je določen do aditivne konstante natančno. Če je krivulja parametrizirana z naravnim parametrom $t = s$, velja

$$\|\dot{\vec{r}}(s)\| = \frac{ds}{ds} = 1.$$

Ta enakost je značilna za naravni parameter in pomeni, da točka potuje po krivulji, ki je parametrizirana z naravnim parametrom, s hitrostjo, ki je po velikosti vedno 1.

2. KRIVULJE V POLARNIH KOORDINATAH

Namesto v kartezičnih, lahko ravninsko krivuljo podamo v polarnih koordinatah, tako da povemo, kakšna funkcija kota φ je razdalja r od izhodišča, torej

$$r = r(\varphi), \quad (\alpha < \varphi < \beta),$$

kjer sta α in β konstanti (lahko tudi $-\infty$ in ∞). Tako podano krivuljo lahko takoj podamo tudi parametrično:

$$x = r(\varphi) \cos \varphi, \quad y = r(\varphi) \sin \varphi.$$

Zgled 2.1. (i) Še najlažje je v polarnih koordinatah podati krožnico s središčem v $(0, 0)$, saj je njena enačba kar

$$r = a,$$

kjer je a pozitivna konstanta (namreč polmer).

Naloga. Kako se glasi v polarnih koordinatah krožnica s središčem (x_0, y_0) in polmerom a ?

(ii) Pri krivulji

$$r = a\varphi,$$

kjer je a pozitivna konstanta, razdalja r od izhodišča narašča s kotom φ . Ta krivulja je *spirala* in je definirana za vse $\varphi \geq 0$.

(iii) Tudi krivulja

$$r = ae^{-\varphi},$$

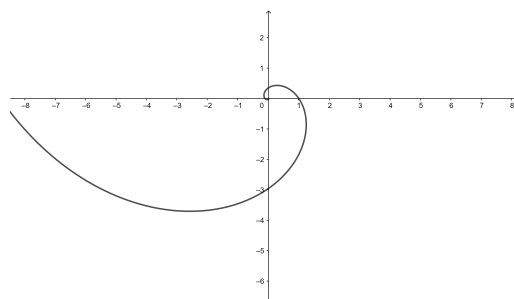
kjer je a pozitivna konstanta, je spirala, vendar pa pri njej r eksponentno pada proti 0, ko gre φ proti ∞ . Imenujemo jo *logaritemska spirala*.

Naloga. Kako se glasi enačba premice, ki naj ne gre skozi izhodišče, v polarnih koordinatah? (Navodilo: v enačbo premice $ax + by = c$ vstavite $x = r \cos \varphi$ in $y = r \sin \varphi$ ter nato izrazite r .)

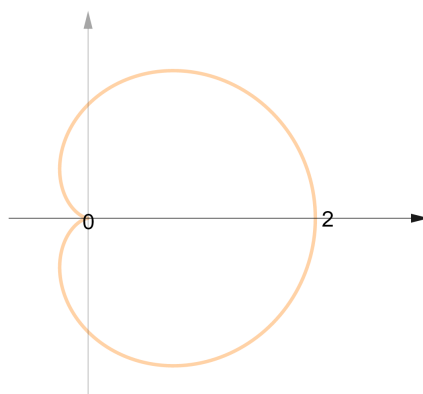
(iv) Krivuljo

$$r = a(1 + \cos \varphi), \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

lahko poskusimo narisati tako, da najprej izračunamo, koliko je r pri kotih $\varphi = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi, 5\pi/4, 3\pi/2, 7\pi/4, 2\pi$. To krivuljo imenujemo *srčnica* ali *kardioida*.



SLIKA 5. Logaritemska spirala $r = 2^{-\varphi}$



SLIKA 6. Srčnica ali kardioida

Koliko so koordinate najvišje točke na kardioidi? Da bi to ugotovili, bomo določili ekstreme funkcije

$$y = r \sin \varphi = a(1 + \cos \varphi) \sin \varphi = a\left(\sin \varphi + \frac{1}{2} \sin(2\varphi)\right).$$

Odvod the funkcije je

$$(2.1) \quad \frac{dy}{d\varphi} = a(\cos \varphi + \cos(2\varphi)) = a(\cos \varphi + 2\cos^2 \varphi - 1).$$

Njegove ničle izračunamo lahko tako, da vpeljemo novo neznanko $u = \cos \varphi$, za katero dobimo kvadratno enačbo

$$2u^2 + u - 1 = 0.$$

Njeni rešitvi sta $u_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = -1, \frac{1}{2}$. Torej je $\cos \varphi = -1$ in tedaj $\varphi = \pm\pi$ ali pa $\cos \varphi = \frac{1}{2}$ in tedaj $\varphi = \pm\frac{\pi}{3}$. Najvišja točka ima očitno $\varphi = \frac{\pi}{3}$, najnižja pa $\varphi = -\frac{\pi}{3}$. Polarni kordinati najvišje točke sta torej $\varphi = \frac{\pi}{3}$ in $r = a(1 + \cos(\pi/3)) = \frac{3}{2}a$, kartezični pa $x = \frac{3}{2}a\frac{1}{2} = \frac{3}{4}a$ in $y = \frac{3}{2}a\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}a$.

Pokažimo še, da se kardioida dotakne absicne osi v izhodišču, natančneje, da je

$$\lim_{\varphi \rightarrow \pm\pi} \frac{dy}{dx} = 0.$$

Imamo $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}}$, pri čemer smo $\frac{dy}{d\varphi}$ že izračunali v (2.1), za $\frac{dx}{d\varphi}$ pa iz $x = a(1 + \cos \varphi) \cos \varphi = a(\cos \varphi + \cos^2 \varphi)$ sledi

$$\frac{dx}{d\varphi} = a(-\sin \varphi - 2\cos \varphi \sin \varphi) = -a(\sin \varphi + \sin(2\varphi)).$$

Torej je

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos \varphi + \cos(2\varphi)}{\sin \varphi + \sin(2\varphi)}.$$

Če vstavimo v to formulo $\varphi = \pm\pi$, dobimo nedoločeni izraz $-\frac{0}{0}$, zato bomo limito računali po L'Hospitalovem pravilu:

$$\lim_{\varphi \rightarrow \pm\pi} = \lim_{\varphi \rightarrow \pm\pi} \frac{\sin \varphi + 2\sin(2\varphi)}{\cos \varphi + 2\cos(2\varphi)} = 0.$$

Naloga. Določite najbolj levi točki na grafu kardioida. Pokažite tudi, da je graf simetričen glede na absicno os.

Kako bi izračunali dolžino krivulje, podane v polarnih koordinatah? Kot smo že omenili, lahko tako krivuljo takoj podamo parametrično kot

$$x = r(\varphi) \cos \varphi, \quad y = r(\varphi) \sin \varphi \quad (\alpha \leq \varphi \leq \beta),$$

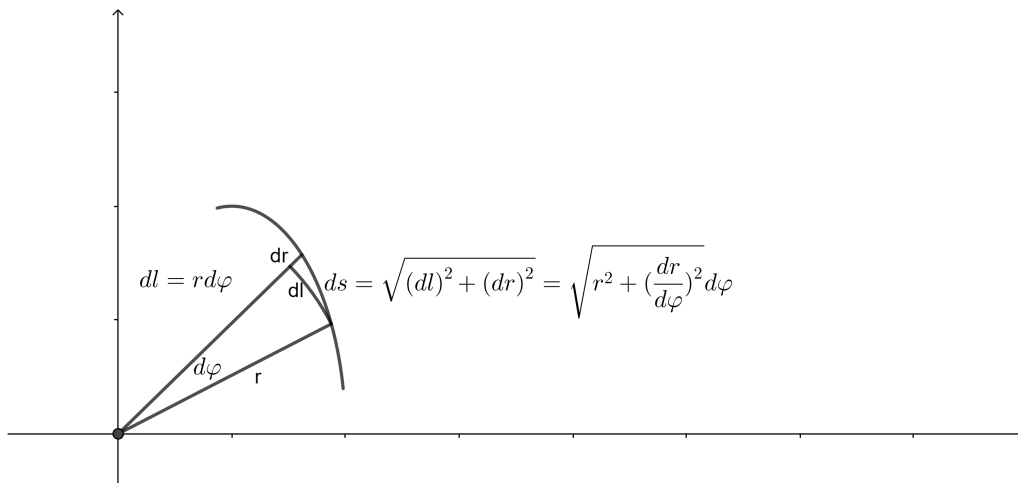
nakar lahko uporabimo formulo za računanje dolžine parametrično podane krivulje, torej

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2} d\varphi.$$

Po krajšem računu bi to formulo lahko preoblikovali v

$$(2.2) \quad s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi.$$

To formulo pa lahko izpeljemo hitreje tako, da krivuljo razdelimo na zelo majhne dele, ki so skoraj ravni, tako da je (glejte sliko)



SLIKA 7. Ločni element v polarnih koordinatah

$$ds = \sqrt{(rd\varphi)^2 + (dr)^2} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi.$$

S seštevanjem dolžin teh majhnih delov in upoštevanjem, da v limiti preide vsota v integral, dobimo formulo (2.2).

Naloga. Izpeljite formulo

$$(2.3) \quad p = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{r(\varphi)^2}{2} d\varphi$$

za ploščino lika, omejenega s krivuljo $r = r(\varphi)$ ($\alpha \leq \varphi \leq \beta$ ter poltrakoma $\varphi = \alpha$ in $\varphi = \beta$).

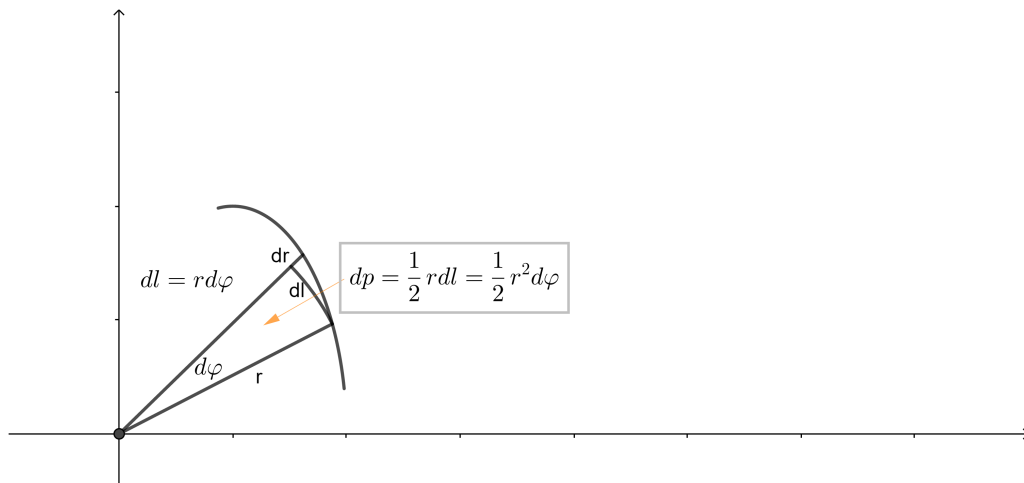
Zgled 2.2. Izračunajmo dolžino kardiode $r = a(1 + \cos \varphi)$ ($-\pi \leq \varphi \leq \pi$). Ker je graf kardiode simetričen glede na abscisno os, imamo po formuli (2.2)

$$\begin{aligned} s &= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1 + \cos \varphi)^2 + a^2(-\sin \varphi)^2} d\varphi = 2a \int_0^{\pi} \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} d\varphi \\ &= 2a \int_0^{\pi} \sqrt{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi = 4a \int_0^{\pi} \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = 8a. \end{aligned}$$

Za ploščino lika, omejenega s kardioido, pa dobimo po (2.3)

$$\begin{aligned} p &= 2 \frac{1}{2} \int_0^{\pi} a^2(1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = a^2 \int_0^{\pi} (1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi \\ &= a^2 \left(\pi + \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos(2\varphi)}{2} d\varphi \right) = \frac{3}{2} \pi a^2. \end{aligned}$$

Naloga. Narišite *štiriperesno deteljico* z enačbo $r = |\sin(2\varphi)|$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$) ter določite ploščino lika, ki ga ograja, in njen obseg.



SLIKA 8. Ploščinski element v polarnih koordinatah

3. PLOSKVE

3.1. Ploskve v $\mathbb{R}^3$. Naj bo $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva funkcija. Množica P vseh točk $\vec{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, ki zadoščajo enačbi $g(x, y, z) = 0$, je ravno praslika ničle: $P = g^{-1}(0)$. Tako množico si običajno predstavljamo kot ploskev v $\mathbb{R}^3$. Na primer enačba $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ predstavlja sfero s središčem 0 in polmerom 1, enačba $x^2 + y^2 - 1 = 0$ pa valj, katerega os se ujema z osjo (z). Ni pa res, da vsaka taka enačba predstavlja ploskev. Na primer enačbi $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ zadošča le točka 0, enačbi $x - x = 0$ pa kar vse točke v $\mathbb{R}^3$. Zagotovo pa si pod enačbo $g(\vec{r}) = 0$ res lahko predstavljamo ploskev, če se da ena od spremenljivk, na primer z , izraziti kot funkcija preostalih dveh, $z = \phi(x, y)$, tako da je $g(x, y, \phi(x, y)) = 0$ za vse x, y . Tedaj je namreč P kar graf funkcije ϕ . Dostikrat pa ne moremo množice P v celoti opisati kot graf kake funkcije, temveč lahko to storimo le po delih. Na primer pri sferi $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ je zgornja polovica graf funkcije $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, spodnja polovica pa graf funkcije $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$. V splošnem bomo upravičeni imeti množico $P = g^{-1}(0)$ za ploskev, če za vsako točko $\vec{r} \in P$ obstaja taka odprta okolica $G_{\vec{r}} \subseteq \mathbb{R}^3$, da lahko na njej izrazimo eno od spremenljivk (in sicer isto na vsej okolici) kot funkcijo preostalih dveh. Pri tem bomo pod pojmom funkcija razumeli odvedljivo funkcijo, ker nam ta predpostavka omogoča računanje. Predpostavka, ki nam zagotavlja, da bo to mogoče, je, da je gradient $\nabla g(\vec{r}) \neq 0$ za vsak $\vec{r} = (x, y, z) \in P = g^{-1}(0)$. Tedaj je namreč vsaj eden od odvodov $\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}$ v točki $\vec{r}$ različen od 0, zato lahko po izreku o implicitni funkciji v okolici te točke iz enačbe $g(x, y, z) = 0$ izrazimo eno od spremenljivk kot funkcijo drugih dveh. V okolici vsake svoje točke se tedaj P ujema z grafom kake zvezno odvedljive funkcije, ki pa ni nujno ista za celotno ploskev P .

Definicija 3.1. Podmnožica P v $\mathbb{R}^3$ je *ploskev*, če za vsako točko $\vec{r} \in P$ obstaja taka odprta okolica $H \subseteq \mathbb{R}^3$, da je $P \cap H$ graf kake zvezno odvedljive funkcije $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$,

definirane na kaki odprti podmnožici $D \subseteq \mathbb{R}^2$. To pomeni, da se na $P \cap H$ ena od koordinat x, y, z da enolično izraziti kot funkcija preostalih, torej da je $P \cap H$ ene od oblik: $P \cap H = \{(x, y, \phi(x, y)) : (x, y) \in D\}$, $P \cap H = \{(x, \phi(x, z), z) : (x, z) \in D\}$, $P \cap H = \{(\phi(y, z), y, z) : (y, z) \in D\}$.

Kot smo že omenili, izrek o implicitni funkciji pove naslednje:

Trditev 3.2. Naj bo $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva funkcija in privzemimo, da je množica $P = g^{-1}(0)$ neprazna. Če je $\nabla g(u) \neq 0$ za vsak $u \in P$, je P ploskev.

Enačba oblike $\vec{r} = \vec{r}(t)$ ($t \in [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $a < b$) predstavlja krivuljo v $\mathbb{R}^3$. Če si mislimo, da je t čas, opisuje krajevni vektor $\vec{r}(t)$ pot točke. Privzeli bomo, da je pri tem $\vec{r}$ zvezno odvedljiva funkcija spremenljivke t . Taka krivulja leži na ploskvi $P = g^{-1}(0)$ natanko tedaj, ko je $g(\vec{r}(t)) = 0$ za vse $t \in [a, b]$. Ko to enakost odvajamo na t , dobimo

$$(\nabla g)(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = 0,$$

kjer smo s piko označili odvod na t . Ta enakost pomeni, da je vektor $(\nabla g)(\vec{r}(t))$ pravokoten na tangentni vektor $\dot{\vec{r}}(t)$ krivulje v točki $\vec{r}(t)$. Če sedaj izberemo poljubno točko $\vec{r}_0$ na ploskvi P in opazujemo vse krivulje na ploskvi P , ki gredo skozi točko $\vec{r}_0$ (vsaka taka krivulja $\vec{r} = \vec{r}(t)$ zadošča pogoju $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ za kak t_0), vidimo, da je vektor $(\nabla g)(\vec{r}_0)$ pravokoten na tangentni vektor $\dot{\vec{r}}(t_0)$ vsake take krivulje. To pomeni, da mora biti vektor $(\nabla g)(\vec{r}_0)$ pravokoten na ploskev P . To velja za vsako točko $\vec{r}_0 \in P$, ki jo bomo odslej označili kar z $\vec{r}$.

Definicija 3.3. Vektor $(\nabla g)(\vec{r})$ imenujemo *normalni vektor na ploskev* $P = g^{-1}(0)$ v točki $\vec{r} \in P$. Ravnino $T_{\vec{r}}P$ z normalnim vektorjem $(\nabla g)(\vec{r})$ skozi točko $\vec{r}$ na ploskvi P pa imenujemo *tangentna ravnina* na ploskev P v točki $\vec{r}$.

Tangentna ravnina na P skozi točko $\vec{r}$ je torej vzporedna vsem tangentnim vektorjem v točki $\vec{r}$ na krivulje skozi $\vec{r}$ na ploskvi P .

Zgled 3.4. Če je ploskev podana eksplicitno kot $z = \phi(x, y)$ za kako zvezno odvedljivo funkcijo ϕ na odprti ravninski podmnožici, jo lahko izrazimo v obliki $g(x, y, z) = 0$, kjer je $g(x, y, z) := \phi(x, y) - z$. Pri tem je $(\nabla g)(x, y, z) = (\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, -1) \neq 0$.

Za hiperboloid $z = x^2 + y^2$ je tako normalni vektor v točki $(3, 4, 25)$ enak $(6, 8, -1)$.

3.2. Parametrično podane ploskve. Opišimo sedaj še zelo pogost način podajanja ploskev. Če so

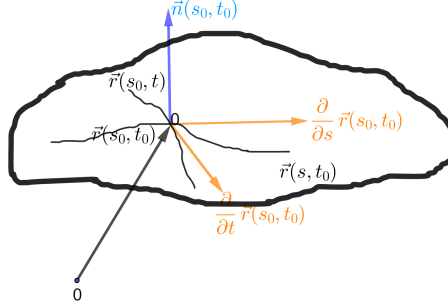
$$(3.1) \quad x = x(s, t), \quad y = y(s, t), \quad z = z(s, t)$$

zvezno odvedljive funkcije dveh spremenljivk $(s, t) \in D$, kjer je D odprta podmnožica v $\mathbb{R}^2$, pravimo, da enakosti (3.1) skupaj predstavljajo *parametrično ploskev* v $\mathbb{R}^3$. V primeru, ko je rang odvoda

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix}$$

enak 2 za vsak $(s, t) \in D$, lahko po izreku o implicitni funkciji izrazimo (v okolici dane točke) (s, t) kot funkcijo dveh od spremenljivk (x, y, z) , recimo $s = s(x, y)$ in $t = t(x, y)$. Ko to vstavimo v formulo $z = z(s, t)$, dobimo z kot zvezno odvedljivo funkcijo koordinat x, y . To pomeni, da enakosti (3.1) lokalno (se pravi, če se omejimo na dovolj majhne dele območja D) predstavljajo ploskev v smislu naše prejšnje definicije. Vzeta v celoti pa množica, ki jo določajo formule (3.1), ni vedno ploskev (podmnogoterost v $\mathbb{R}^3$), saj taka množica lahko seka samo sebe na dokaj ‘singularen’ način. Enačbe (3.1) pogosto napišemo kar v vektorski obliki $\vec{r} = \vec{r}(s, t)$, kjer je $\vec{r} = (x, y, z)$. Tudi zapis $\vec{r} = \vec{r}(s, t)$ imenujemo parametrična enačba ploskve (s parametroma $(s, t) \in D$).

Pri fiksnem $t = t_0$ opisuje formula $\vec{r}(s, t_0)$ krivuljo na parametrično podani ploskvi $\vec{r} = \vec{r}(s, t)$. Njen tangentni vektor v točki $\vec{r}(s_0, t_0)$ je $\frac{\partial}{\partial s} \vec{r}(s_0, t_0)$. Prav tako



SLIKA 9. Normala na parametrično ploskev

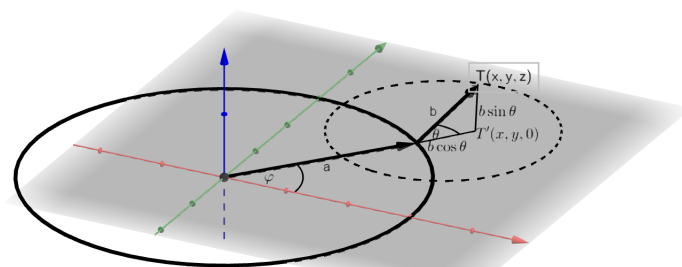
opisuje formula $\vec{r}(s_0, t)$, ko t teče, krivuljo na ploskvi skozi točko $\vec{r}(s_0, t_0)$ in njen tangentni vektor v točki $\vec{r}(s_0, t_0)$ je $\frac{\partial}{\partial t} \vec{r}(s_0, t_0)$. Vektorja $\frac{\partial}{\partial s} \vec{r}(s_0, t_0)$ in $\frac{\partial}{\partial t} \vec{r}(s_0, t_0)$ sta torej oba tangentna na ploskev, zato je njun vektorski produkt

$$(3.2) \quad \vec{n}(s_0, t_0) = \frac{\partial}{\partial s} \vec{r}(s_0, t_0) \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{r}(s_0, t_0)$$

pravokoten na ploskev v točki $\vec{r}(s_0, t_0)$. Če je različen od 0, določa smer *normala na ploskev* v točki $\vec{r}(s_0, t_0)$ (tj. premice skozi točko $\vec{r}(s_0, t_0)$ ploskve, ki je pravokotna na ploskev).

Zgled 3.5. Krožnica s polmerom b in središčem $S(a, 0, 0)$ leži v ravnini x, z ; pri tem naj bo $a > b$. Zavrtimo jo okrog osi z . Izrazimo koordinate poljubne točke T na nastalem svitku s kotom θ , ki ga oklepa daljica ST z ravnino x, y , in polarnim kotom ϕ , ki ga oklepa daljica OS s pozitivnim poltrakom abscisne osi. Iz slike vidimo, da je

$$x = (a + b \cos \theta) \cos \varphi, \quad y = (a + b \cos \theta) \sin \varphi, \quad z = b \sin \theta \quad (0 \leq \theta, \varphi < 2\pi).$$



SLIKA 10. Parametrizacija svitka (črtkana krožnica je v navpični ravnini, njeno središče potuje po polno narisani krožnici, ki je v vodoravni ravnini x, y)

Izrazimo sedaj s parametroma φ in θ še normalni vektor na svitek v poljubni njegovi točki. Ker je tukaj $\vec{r}(\theta, \varphi) = ((a + b \cos \theta) \cos \varphi, (a + b \cos \theta) \sin \varphi, b \sin \theta)$, je

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \vec{r}(\theta, \varphi) = (-b \sin \theta \cos \varphi, -b \sin \theta \sin \varphi, b \cos \theta)$$

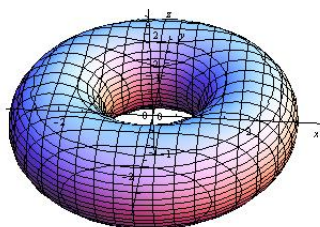
in

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{r}(\theta, \varphi) = (-(a + b \cos \theta) \sin \varphi, (a + b \cos \theta) \cos \varphi, 0)$$

ter

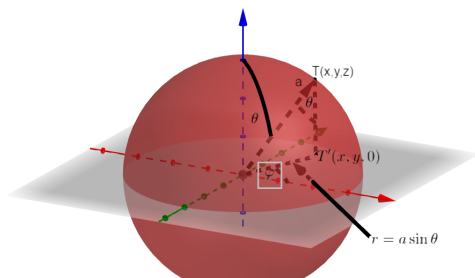
$$\begin{aligned} \vec{n}(\theta, \varphi) &= \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{r}(\theta, \varphi) \times \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{r}(\theta, \varphi) \\ &= \det \begin{bmatrix} -b \sin \theta \cos \varphi & -b \sin \theta \sin \varphi & b \cos \theta \\ -(a + b \cos \theta) \sin \varphi & (a + b \cos \theta) \cos \varphi & 0 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{bmatrix} \\ &= -b(a + b \cos \theta)(\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta). \end{aligned}$$

Za enotski normalni vektor lahko torej vzamemo kar $(\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta)$.



SLIKA 11. Svitek.

Zgled 3.6. Oglejmo si še, kako lahko na naraven način parametriziramo sfero s središčem v $(0, 0, 0)$ in polmerom a . Naj bo θ kot, ki ga krajevni vektor $\vec{r}$ do dane točke na sferi oklepa s pozitivnim poltrakom osi z . Označimo s φ kot, ki ga oklepa pravokotna projekcija vektorja $\vec{r}$ na ravnino x, y s pozitivnim potrakom osi x .



SLIKA 12. Parametrizacija sfere

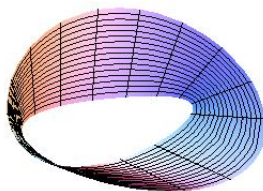
Potem je

$$x = a \sin \theta \cos \varphi, \quad y = a \sin \theta \sin \varphi, \quad z = a \cos \theta \quad (0 \leq \theta < \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi)$$

parametrizacija sfere.

Naloga. Izračunajte za gornjo parametrizacijo sfere normalni vektor $\frac{\partial}{\partial \theta} \vec{r}(\theta, \varphi) \times \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{r}(\theta, \varphi)$ in se prepričajte, da je kolinearen z $\vec{r}(\theta, \varphi)$.

Opomba 3.7. Enačba oblike $g(\vec{r}) = 0$, kjer je $(\nabla g)(\vec{r}) \neq 0$ za vsak $\vec{r} \in g^{-1}(0)$, predstavlja lahko le tako ploskev, pri kateri imamo v vsaki točki definiran normalni neničelni vektor, ki je zvezno odvisen od točke. Vsaka taka ploskev ima dve strani. Möbiusovega traku, ki ima samo eno stran, ne moremo podati na ta način z eno samo funkcijo g .



SLIKA 13. Möbiusov trak je enostranska ploskev, podana kot $((a + s \cos t) \cos(2t), (a + s \cos t) \sin(2t), s \sin t)$, $-b \leq s \leq b$, $0 \leq t \leq \pi$.

Naloge 1. Določi enačbo tangentne ravnine na ploskev $xy + yz + zx = 1$ v točki $(1, 0, 1)$.

2. Določi enačbo tangente na krivuljo v $\mathbb{R}^3$, ki je presek ploskev $xy + z = 0$ in $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ v točki $(1, -2, 2)$.

3. Dokaži, da enačba $x^2 + y^4 + z^4 = 6$ predstavlja kompaktno ploskev v $\mathbb{R}^3$. Napiši tudi enačbo tangentne ravnine na to ploskev v točki $(2, 1, 1)$.

4. Ali je ploskev $x^3 + y^3 + z^3 = 1$ kompaktna podmnožica v $\mathbb{R}^3$? Ali je zaprta?

5. Katero ploskev predstavlja enačba $4a^2(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - b^2)^2$, kjer je $a > b > 0$? (Navodilo: V parametričnih enačbah svitka izločite parametra ϕ in θ , tako da dobite povezavo med x, y, z .)

4. INTEGRALI S PARAMETROM

Naj bo f zvezna funkcija dveh spremenljivk, definirana na pravokotniku $P = [a, b] \times [c, d]$ ($a < b, c < d$). Integral

$$(4.1) \quad F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

je funkcija spremenljivke y . Tak integral imenujemo *integral s parametrom* y .

Zgled 4.1. $F(y) = \int_0^\pi \sin(xy) dx = \frac{1 - \cos(\pi y)}{y}$.

Trditev 4.2. Če je f zvezna funkcija na pravokotniku $P = [a, b] \times [c, d]$, je funkcija F (definirana z (4.1)) zvezna na intervalu $[c, d]$.

Dokaz. Ker je zvezna funkcija na kompaktni množici enakomerno zvezna, za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da velja $|f(x, y + h) - f(x, y)| < \varepsilon/(b - a)$, če je $|h| < \delta$ za vse $(x, y), (x, y + h) \in P$. Teda je

$$\begin{aligned} |F(y + h) - F(y)| &= \left| \int_a^b (f(x, y + h) - f(x, y)) dx \right| \leq \int_a^b |f(x, y + h) - f(x, y)| dx \\ &< \int_a^b \frac{\varepsilon}{b - a} dx = \varepsilon, \end{aligned}$$

kar pove, da je F zvezna. □

Izrek 4.3. Naj bo f zvezna na pravokotniku $P = [a, b] \times [c, d]$ in privzemimo, da obstaja parcialni odvod $\frac{\partial f}{\partial y}$, ki naj bo zvezen na P . Potem je funkcija F (podana z (4.1)) odvedljiva in velja

$$(4.2) \quad F'(y) = \frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx.$$

Dokaz. Pokazati moramo, da gre

$$(4.3) \quad \frac{F(y + h) - F(y)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$$

proti 0, ko gre h proti 0. Po Lagrangeovem izreku za funkcijo $y \mapsto f(x, y)$ spremenljivke y (pri fiksnem x) obstaja tak $\xi \in (y, y + h)$ (ki je lahko odvisen od y in h), da je $f(x, y + h) - f(x, y) = h \frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi)$. Ker je funkcija $\frac{\partial f}{\partial y}$ enakomerno zvezna

na P in $\xi \in (y, y+h)$, za vse dovolj majhne h velja $|\frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)| < \varepsilon/(b-a)$ za vse $(x, y) \in P$. Izraz (4.3) lahko tedaj ocenimo kot

$$\begin{aligned} & \left| \frac{F(y+h) - F(y)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx \right| \\ &= \left| \int_a^b \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} dx - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx \right| \\ &= \left| \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right] dx \right| \\ &< \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Z uporabo gornjega izreka lahko izračunamo kak integral, ki ga sicer ne bi mogli.

Zgled 4.4. Za $y > 0$ imamo

$$\begin{aligned} F(y) &= \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \int_0^1 \left(-\frac{1}{y}\right) \left[\frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \right] dx \\ &= -\frac{1}{y} \frac{d}{dy} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx \\ &= -\frac{1}{y} \frac{d}{dy} [\ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})]_0^1 \\ &= -\frac{1}{y} \frac{d}{dy} [\ln(1 + \sqrt{1 + y^2}) - \ln y] \\ &= -\frac{1}{y} \left[\frac{y}{\sqrt{1 + y^2}(1 + \sqrt{1 + y^2})} - \frac{1}{y} \right]. \end{aligned}$$

Za $y = 1$ dobimo tako

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} = 1 - \frac{1}{2 + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Očitno je $F(-y) = F(y)$.

Naloga. Izračunajte $\frac{d}{dy} \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx$, kjer sta φ in ψ odvedljivi funkciji spremenljivke y . (Navodilo: $\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx = -\int_c^{\varphi(y)} f(x, y) dx + \int_c^{\psi(y)} f(x, y) dx$, kjer je c konstanta. Označimo $z = \psi(y)$. Odvajajte funkcijo $F(y, \psi(y)) = \int_c^z f(x, y) dx$.)

5. IZLIMITIRANI INTEGRALI S PARAMETROM

Definicija 5.1. Integral $F(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$ je *enakomerno konvergenten* za $y \in S$ (kjer je S npr. kaka podmnožica v $\mathbb{R}$), če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $M \in \mathbb{R}$, da je

$$\left| \int_b^\infty f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

za vse $b \geq M$ in vse $y \in S$.

Razlika z navadno konvergenco je v tem, da mora tukaj obstajati tak M , ki je ustrezen istočasno za vse $y \in S$ (M je torej odvisen le od ε , ne pa od y). Pri navadni konvergenci integrala pri vseh $y \in S$ pa obstajajo taki $M_y \in \mathbb{R}$, da je $|\int_b^\infty f(x, y) dx| < \varepsilon$ za $b \geq M_y$, vendar je lahko množica $\{M_y : y \in S\}$ navzgor neomejena in zato ne obstaja skupni M , ki bi bil ustrezen za vse $y \in S$.

Zgled 5.2. Integral

$$F(y) = \int_0^\infty e^{-yx} dx$$

je enakomerno konvergenten na vsakem poltraku $[\delta, \infty)$, $\delta > 0$, ni pa enakomerno konvergenten na poltraku $(0, \infty)$. Če je $y \geq \delta$, velja namreč (za $b > 0$)

$$\int_b^\infty e^{-xy} dx = \frac{e^{-by}}{y} \leq \frac{e^{-b\delta}}{\delta},$$

pri čemer je izraz na desni pod poljubnim pozitivnim ε za vse dovolj velike b . To pove, da je konvergenca enakomerna na poltraku $[\delta, \infty)$, če je $\delta > 0$. Konvergenca pa ni enakomerna na poltraku $(0, \infty)$, ker neenakost $\frac{e^{-by}}{y} < \varepsilon$ ne more veljati hkrati za vse $y > 0$, pa če je b še tako velik, saj gre (pri vsakem $b > 0$) $\frac{e^{-by}}{y}$ proti ∞ , ko gre y proti 0.

Trditev 5.3. če je f zvezna funkcija na pasu $P = [a, \infty) \times [c, d]$ in integral

$$F(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$$

enakomerno konvergenten za $y \in [c, d]$, je F zvezna funkcija na $[c, d]$.

Dokaz. Za vsak b velja

$$\begin{aligned} & |F(y+h) - F(y)| \\ &= \left| \int_a^b (f(x, y+h) - f(x, y)) dx + \int_b^\infty f(x, y+h) dx - \int_b^\infty f(x, y) dx \right| \\ &\leq \left| \int_a^b (f(x, y+h) - f(x, y)) dx \right| + \left| \int_b^\infty f(x, y+h) dx \right| + \left| \int_b^\infty f(x, y) dx \right|. \end{aligned}$$

Zaradi enakomerne konvergence sta (pri poljubnem $\varepsilon > 0$ zadnja dva člena pod $\varepsilon/3$ za vse dovolj velike b . Prvi člen pa je tudi pod $\varepsilon/3$ za vse dovolj majhne h , saj že vemo, da je integral v končnih mejah (namreč $\int_a^b f(x, y) dx$) zvezna funkcija parametra y . Torej iz gornje ocene sledi, da je $|F(y+h) - F(y)| < \varepsilon$ za vse dovolj majhne h , kar pomeni, da je F zvezna. $\square$

6. DVOJNI IN DVAKRATNI INTEGRALI

Naj bo $P = [a, b] \times [c, d]$ in $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija. Definirati želimo *Riemannov integral* omejene funkcije f po pravokotniku P . Delitev $D_{[a,b]}$ intervala $[a, b]$ je določena z zaporedjem točk

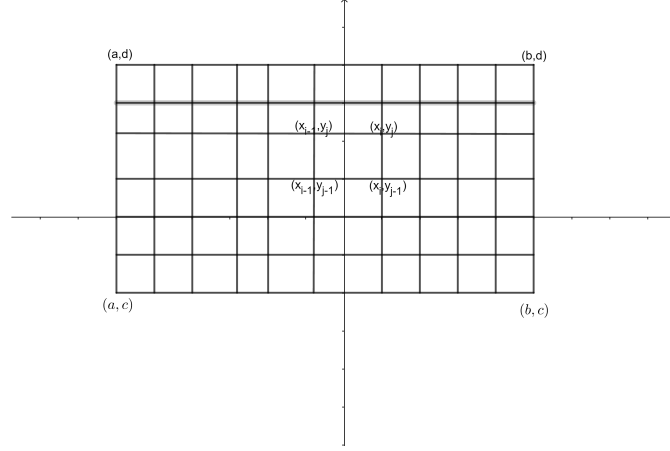
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = b.$$

Delitvi $D_{[a,b]}$ skupaj s poljubno delitvijo $D_{[c,d]}$ intervala $[c, d]$, določeno z

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = d,$$

določa neko delitev D pravokotnika P na manjše pravokotnike

$$P_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n).$$



SLIKA 14. Delitev pravokotnika

Naj bo

$$m_{i,j} = \inf_{(x,y) \in P_{i,j}} f(x,y) \quad \text{in} \quad M_{i,j} = \sup_{(x,y) \in P_{i,j}} f(x,y).$$

Označimo z $\Delta_{i,j}p = \Delta_i x \cdot \Delta_j y = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ ploščino pravokotnika $P_{i,j}$. Vsoti

$$\underline{S}_D = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n m_{i,j} \Delta_{i,j} p \quad \text{in} \quad \bar{S}_D = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n M_{i,j} \Delta_{i,j} p$$

imenujemo *spodnja* in *zgornja Riemannova vsota* funkcije f pri delitvi D . *Nadaljevanje delitve* D dobimo tako, da delilnim točkam posameznih intervalov dodamo še kako delilno točko. Če dodamo npr. delitvi $D_{[a,b]}$ eno samo novo delilno točko $t \in [x_{i-1}, x_i]$, bomo imeli v novi delitvi N namesto pravokotnika $P_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ dva pravokotnika $P'_{i,j} = [x_{i-1}, t] \times [y_{j-1}, y_j]$ in $P''_{i,j} = [t, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, v spodnji Riemannovi vsoti $\underline{S}_D$ pa je treba (ko tvorimo $\underline{S}_N$) vsak člen $m_{i,j}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ ($j = 1, \dots, n$) nadomestiti z

$$(6.1) \quad m'_{i,j}(t - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) + m''_{i,j}(x_i - t)(y_j - y_{j-1}),$$

kjer je

$$m'_{i,j} = \inf_{(x,y) \in P'_{i,j}} f(x,y) \quad \text{in} \quad m''_{i,j} = \inf_{(x,y) \in P''_{i,j}} f(x,y).$$

Ker je $m'_{i,j} \geq m_{i,j}$ in $m''_{i,j} \geq m_{i,j}$ (saj se infimum ne more zmanjšati, ko množico zmanjšamo), je izraz (6.1) večji ali enak

$$m_{i,j}(t - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) + m_{i,j}(x_i - t)(y_j - y_{j-1}) = m_{i,j}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

Ker se drugi členi v Riemannovi vsoti $\underline{S}_N$ ujemajo z ustreznimi členi v vsoti $\underline{S}_D$, sledi od tod, da je $\underline{S}_N \geq \underline{S}_D$. Podobno dokažemo, da je $\bar{S}_N \leq \bar{S}_D$. Ker lahko vsako

nadaljevanje delitve D dobimo s postopnim dodajanjem po ene točke, smo s tem dokazali naslednjo lemo:

Lema 6.1. Če je N nadaljevanje delitve D pravokotnika P , za spodnje in zgornje Riemannove vsote poljubne omejene funkcije $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ velja

$$\underline{S}_N \geq \underline{S}_D \quad \text{in} \quad \overline{S}_N \leq \overline{S}_D.$$

Očitno je $\underline{S}_D \leq \overline{S}_D$ za vsako delitev D . Za poljubni delitvi D_1 in D_2 pravokotnika P naj bo $N = D_1 \cup D_2$ njuno skupno nadaljevanje. Potem je

$$(6.2) \quad \underline{S}_{D_1} \leq \underline{S}_N \leq \overline{S}_N \leq \overline{S}_{D_2}.$$

Torej je množica vseh spodnji Riemannovih vsot $\underline{S}_D$ dane funkcije f na pravokotniku P , ko D teče po vseh delitvah pravokotnika P , navzgor omejena (s katerokoli zgornjo vsoto $\overline{S}_D$), zato ima supremum; imenujmo ga $\underline{S}$. Podobno je množica vseh zgornjih Riemannovih vsot $\overline{S}_D$, ko D teče po vseh delitvah pravokotnika P , navzdol omejena; označimo njen infimum z $\overline{S}$. Ker je $\underline{S}_{D_1} \leq \overline{S}_{D_2}$ za poljubni delitvi D_1 in D_2 pravokotnika P , mora biti

$$(6.3) \quad \underline{S} \leq \overline{S}.$$

Definicija 6.2. Omejena funkcija $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ je na pravokotniku P integrabilna v Riemannovem smislu, če velja

$$\underline{S} = \overline{S},$$

kjer je $\underline{S}$ supremum njenih spodnjih, $\overline{S}$ pa infimum njenih zgornjih Riemannovih vsot. Tedaj skupno vrednost $\underline{S} = \overline{S}$ označimo kot

$$\iint_P f(x, y) dp,$$

kjer pomeni $dp = dx dy$ plosčinski element, in jo imenujemo dvojni integral funkcije f po pravokotniku P .

Izrek 6.3. Zvezna funkcija f na pravokotniku $P = [a, b] \times [c, d]$ je integrabilna in velja

$$(6.4) \quad \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \iint_P f(x, y) dp = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Enak zaključek velja tudi za funkcijo f , ki ni nujno zvezna, če je množica N njenih točk nezveznosti taka, da jo za vsak $\varepsilon > 0$ lahko pokrijemo s končno mnogo pravokotniki (s stranicami vzporednimi koordinatnima osema), katerih vsota plosčin je pod ε . (Pravzaprav sme biti pravokotnikov števno mnogo; tedaj pravimo, da ima N mero 0.) Ta pogoj je izpolnjen npr., kadar je N končna množica, ali pa če je N graf kake zvezne funkcije ene spremenljivke.

Dokaz. Dokazati moramo, da je $\overline{S} = \underline{S}$, za kar pa zadošča dokazati (ker je $\overline{S} \geq \underline{S}$), da je $\overline{S} - \underline{S} < \varepsilon$ za vsak $\varepsilon > 0$. Ker za vsako delitev D pravokotnika P velja $\underline{S}_D \leq \underline{S} \leq \overline{S} \leq \overline{S}_D$, je $\overline{S} - \underline{S} \leq \overline{S}_D - \underline{S}_D$, zato zadošča dokazati, da je

$$(6.5) \quad \overline{S}_D - \underline{S}_D < \varepsilon$$

za kako delitev D . Če je f zvezna, je na kompaktni množici P enakomerno zvezna, zato obstaja tak $\delta > 0$, da je $|f(x, y) - f(u, v)| < \varepsilon/p$, kakor hitro je $\|(x, y) - (u, v)\| < \delta$ (in $(u, v), (x, y) \in P$), kjer je p ploščina pravokotnika P (tj. $p = (b - a) \times (d - c)$). Za poljubno tako drobno delitev D , da so diagonale vseh delilnih pravokotnikov $P_{i,j}$ manjše od δ je tedaj $M_{i,j} - m_{i,j} < \varepsilon/p$, kjer je $M_{i,j} = \sup_{(x,y) \in P_{i,j}} f(x, y)$ in $m_{i,j} = \inf_{(x,y) \in P_{i,j}} f(x, y)$, zato velja

$$\overline{S}_D - \underline{S}_D = \sum_i \sum_j (M_{i,j} - m_{i,j}) \Delta_{i,j} p < \sum_i \sum_j \frac{\varepsilon}{p} \Delta_{i,j} p = \frac{\varepsilon}{p} \sum_i \sum_j \Delta_{i,j} p = \frac{\varepsilon}{p} p = \varepsilon.$$

Če f ni zvezna, a množica N njenih točk nezveznosti zadošča pogoju v izreku, potem jo pokrijemo s končno mnogo odprtimi pravokotniki P_k° (kjer naj P_k pomeni zaprt pravokotnik), katerih vsota ploščin je pod ε . Pri vsaki taki delitvi D , pri kateri so med delilnimi pravokotniki tudi vsi P_k , bo prispevek v Riemannovih vsotah $\underline{S}_D$ in $\overline{S}_D$ tistih členov, ki vsebujejo ploščine pravokotnikov P_k omejen po absolutni vrednosti z $|m|\varepsilon$ oziroma $|M|\varepsilon$. Ker je množica $P \setminus \cup_k P_k^\circ$ kompaktna, je na njej f enakomerno zvezna, zato lahko na njej razliko med ustreznimi členi zgornje in spodnje Riemannove vsote ocenimo kot zgoraj za zvezno funkcijo, torej sledi, da je

$$\overline{S}_D - \underline{S}_D < \varepsilon + \varepsilon \max\{|m|, |M|\}.$$

Ker velja to za vsak $\varepsilon > 0$, sledi $\overline{S} = \underline{S}$.

Dokazali bomo le še prvo enakost (6.4), saj je dokaz druge enak. Pri tem bomo dodatno privzeli, da je za vsak x funkcija $y \mapsto f(x, y)$ integrabilna na intervalu $[c, d]$ in funkcija $x \mapsto \int_c^d f(x, y) dy$ integrabilna na intervalu $[a, b]$. Ta dva pogoja sta avtomatično izponjena, kadar je f zvezna, saj vemo, da je tedaj tudi $x \mapsto \int_c^d f(x, y) dy$ zvezna. (V splošnem se, da dokazati, da je funkcija $y \mapsto f(x, y)$ integrabilna za skoraj vsak $x \in [a, b]$, kar sicer zadošča za dokaz izreka, vendar bomo ta razmislek izpustili, ker kasneje v tem delu ne bomo uporabili izreka v taki splošnosti.) Ker na delilnem pravokotniku $P_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ velja $m_{i,j} \leq f(x, y) \leq M_{i,j}$, imamo

$$m_{i,j}(y_j - y_{j-1}) \leq \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y) dy \leq M_{i,j}(y_j - y_{j-1}).$$

Od tod dobimo z integriranjem po x v mejah od x_{i-1} do x_i

$$m_{i,j}(y_j - y_{j-1})(x_i - x_{i-1}) \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y) dy \right) dx \leq M_{i,j}(y_j - y_{j-1})(x_i - x_{i-1}).$$

Ko seštejemo te neenakosti po vseh i, j , sledi

$$\underline{S}_D \leq \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx \leq \overline{S}_D.$$

Ker velja ta ocena za vse delitve D , sledi

$$(6.6) \quad \underline{S} \leq \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx \leq \overline{S}.$$

Ker pa je $\overline{S} = \underline{S}$, sledi iz enakosti (6.6) prva enakost v (6.4). $\square$

Enakosti (6.4) veljata za precej širši razred funkcij in za splošnejši integral od Riemannovega. V takem, splošnejšem, kontekstu imenujemo gornji izrek *Fubinijev izrek*. Tudi poseben primer, ki smo ga tukaj dokazali, bomo imenovali Fubinijev izrek.

Naloga. Naj bo $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Pokažite, da je za vsak $\varepsilon > 0$ mogoče graf $G = \{(x, g(x)) : a \leq x \leq b\}$ pokriti z unijo pravokotnikov, katerih vsota plosčin je pod ε .

Pri dani delitvi D pravokotnika P na manjše pravokotnike $P_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ ($i = 1, \dots, m < j = 1, \dots, n$) in poljubnem naboru točk $(\xi_{i,j}, \eta_{i,j}) \in P_{i,j}$ imenujemo tudi vsoto

$$S = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\xi_{i,j}, \eta_{i,j})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

Riemannova vsota funkcije f pri delitvi P . Ker je očitno $\underline{S} \leq S \leq \overline{S}$, nam gornji razmisleki povedo, da velja naslednja ugotovitev:

Posledica 6.4. *Za funkcijo f , ki je integrabilna v Riemannovem smislu na pravokotniku P , konvergirajo Riemannove vsote S proti $\iint_P f(x, y) dp$, ko gredo velikosti delilnih pravokotnikov (se pravi njihove diagonale) proti 0. Natančneje: za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $|S - \iint_P f(x, y) dp| < \varepsilon$ za vsako Riemannovo vsoto funkcije f pri vsaki taki delitvi pravokotnika P , da so dolžine diagonal vseh delilnih pravokotnikov pri tej delitvi pod δ .*

Naloga. Definirajte trojni integral funkcije treh spremenljivk po kvadru in dokažite, da so zvezne funkcije na kvadru integrabilne.

7. INTEGRIRANJE IN ODVAJANJE IZLIMITIRANIH INTEGRALOV S PARAMETROM

Sedaj vemo, da se pri končnih mejah sme zamenjati vrstni red integriranj pri (zvezni) funkciji dveh spremenljivk, kako pa je s tem, ko je ena od mej ∞ ?

Izrek 7.1. *Naj bo f zvezna na pasu $[a, \infty) \times [c, d]$. Če je integral $\int_a^\infty f(x, y) dx$ enakomerno konvergenten za $y \in [c, d]$, potem je*

$$\int_c^d \int_a^\infty f(x, y) dx dy = \int_a^\infty \int_c^d f(x, y) dy dx.$$

Dokaz. Po definiciji je

$$\int_a^\infty \int_c^d f(x, y) dy dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

Pri tem ni očitno, da limita na desni sploh obstaja, toda pokazali bomo, da je enaka integralu $\int_c^d \int_a^\infty f(x, y) dx dy$ (ki obstaja, ker je funkcija $y \mapsto \int_a^\infty f(x, y) dx$ zvezna, torej integrabilna na $[c, d]$). V ta namen moramo pokazati, da gre razlika

$$\int_c^d \int_a^\infty f(x, y) dx dy - \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

proti 0, ko gre b proti ∞ . Toda ta razlika je preprosto $\int_c^d \int_b^\infty f(x, y) dx dy$, torej po absolutni vrednosti pod

$$(7.1) \quad \int_c^d \left| \int_b^\infty f(x, y) dx \right| dy.$$

Pri tem je zaradi enakomerne konvergence $\left| \int_b^\infty f(x, y) dx \right| < \varepsilon/(d-c)$ za vse dovolj velike b in tedaj je izraz (7.1) pod ε . $\square$

Izrek 7.2. Naj bosta f in $\frac{\partial f}{\partial y}$ zvezni na pasu $[a, \infty) \times [c, d]$, naj bo integral

$$F(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$$

konvergenten za $y \in [c, d]$, integral

$$\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$$

pa enakomerno konvergenten na $[c, d]$. Potem je F odvedljiva funkcija in velja

$$F'(y) = \frac{d}{dy} \int_a^\infty f(x, y) dx = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx.$$

Dokaz. Kot vemo, je funkcija

$$g(y) := \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$$

zvezna, zato je njen integral $\int_c^y g(t) dt$ odvedljiva funkcija zgornje meje y . Iz zveze

$$\begin{aligned} \int_c^y g(t) dt &= \int_c^y \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx dt = \int_a^\infty \int_c^y \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dt dx \\ &= \int_a^\infty (f(x, y) - f(x, c)) dx = \int_a^\infty f(x, y) dx - C = F(y) - C, \end{aligned}$$

kjer smo označili $C = \int_a^\infty f(x, c) dx$ (konstanta), potem sledi, da je F odvedljiva funkcija in $F'(y) = g(y)$. $\square$

Preden navedemo zgled uporabe gornjega izreka, moramo povedati kriterij za ugotavljanje enakomerne konvergence.

Izrek 7.3. Integral $\int_a^\infty f(x, y) dx$ je enakomerno konvergenten na S natanko tedaj, ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $N \in \mathbb{R}$, da je

$$(7.2) \quad \left| \int_b^d f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

za poljubna $d > b \geq N$ in sicer hkrati za vse $y \in S$.

Dokaz. Če je integral enakomerno konvergenten, potem obstaja tak $M \in \mathbb{R}$, da je $\left| \int_b^\infty f(x, y) dx \right| < \varepsilon/2$ za vse $b \geq M$ in vse $y \in S$. Za $d > b > M$ in $y \in S$ tedaj velja

$$\left| \int_b^d f(x, y) dx \right| = \left| \int_d^\infty f(x, y) dx - \int_b^\infty f(x, y) dx \right|$$

$$\leq \left| \int_d^\infty f(x, y) dx \right| + \left| \int_b^\infty f(x, y) dx \right| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Za dokaz v obratno smer pa označimo $F_n(y) := \int_a^n f(x, y) dx$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, $n \geq a$. Iz pogoja (7.2) sledi, da je zaporedje funkcij F_n enakomerno Cauchyvevo (in s tem enakomerno konvergentno) na S , saj za $n > m \geq N$ velja

$$|F_n(y) - F_m(y)| = \left| \int_m^n f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

za vse $y \in S$ hkrati. Naj bo F limita zaporedja F_n . Za vsak $b \geq N$ in $n \geq N$ velja

$$\begin{aligned} |F(y) - \int_a^b f(x, y) dx| &\leq |F(y) - F_n(y)| + |F_n(y) - \int_a^b f(x, y) dx| \\ &= |F(y) - F_n(y)| + \left| \int_n^b f(x, y) dx \right| < |F(y) - F_n(y)| + \varepsilon. \end{aligned}$$

Ker zaporedje F_n konvergira enakomerno proti F , je za vse dovolj velike n tudi člen $|F(y) - F_n(y)|$ pod ε za vse $y \in S$ in iz gornje ocene sledi, da je $|F(y) - \int_a^b f(x, y) dx| < 2\varepsilon$ za vse $b \geq N$. Ker velja to za vse $\varepsilon > 0$, to pomeni, da integrali $\int_a^b f(x, y) dx$ konvergirajo proti $F(y)$ enakomerno na S (integrali $\int_b^\infty f(x, y) dx$ pa proti 0), ko gre b proti ∞ . $\square$

Posledica 7.4. Če je $|f(x, y)| \leq g(x, y)$ za vse $(x, y) \in [a, \infty) \times [c, d]$ in je integral $\int_a^b g(x, y) dx$ enakomerno konvergenten na $[c, d]$, je enakomerno konvergenten tudi integral $\int_a^b f(x, y) dx$.

Da bi lahko uporabili gornji kriterij v konkretnih primerih, je koristno poznati naslednji drugi izrek o povprečju.

Izrek 7.5. Naj bo f integrabilna, g pa nenegativna padajoča (odvedljiva) funkcija na intervalu $[a, b]$. Potem obstaja taka točka $\xi \in [a, b]$, da je

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(a) \int_a^\xi f(x) dx.$$

Dokaz. Če je $g(a) = 0$, je $g(y) = 0$ za vse $y \in [a, b]$, ker je g padajoča in nenegativna. Tedaj je dokaz trivialen, zato vzemimo, da je $g(a) > 0$. Funkcija $F(x) := \int_a^x f(t) dt$ je zvezna, zato zavzame vse vrednosti med svojim minimumom m in maksimumom M na $[a, b]$. Pokazati moramo torej, da je $m \leq \frac{1}{g(a)} \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M$, saj bo potem $F(\xi) = \frac{1}{g(a)} \int_a^b f(x)g(x) dx$ za kak $\xi \in [a, b]$ in tako $g(a) \int_a^\xi f(x) dx = \int_a^b f(x)g(x) dx$. To bomo pokazali v primeru, ko je g odvedljiva (da bomo lahko integrirali per partes), čeprav je ta predpostavka odveč, vendar je brez nje dokaz nekoliko daljši. Ker je g padajoča, je $-g' \geq 0$. Velja:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x) dx &= \int_a^b F'(x)g(x) dx = F(x)g(x)|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x) dx \\ &= F(b)g(b) + \int_a^b F(x)(-g'(x)) dx. \end{aligned}$$

Ker je $m \leq F(x) \leq M$, je zadnji integral med $m \int_a^b (-g'(x)) dx = m(g(a) - g(b))$ in $M(g(a) - g(b))$, in sledi, da je $\int_a^b f(x)g(x) dx$ med $F(b)g(b) + m(g(a) - g(b)) = mg(a) + g(b)(F(b) - m)$ in $Mg(a) + g(b)(F(b) - M)$. Ker je $g(b) \geq 0$ in $M \geq F(b) \geq m$, sledi, da leži $\int_a^b f(x)g(x) dx$ tudi med $mg(a)$ in $Mg(a)$, kar smo pravzaprav želeli dokazati. $\square$

Naloga. Formulirajte in dokažite inačico zadnjega izreka v primeru, ko je g naraščajoča funkcija.

Zgled 7.6. Izračunati želimo integral

$$F(y) = \int_0^\infty e^{-xy} \frac{\sin x}{x} dx$$

za $y \geq 0$. Za $y > 0$ je integral konvergenten, ker je $e^{-xy} \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq e^{-xy}$ in že vemo, da je integral $\int_0^\infty e^{-xy} dx$ konvergenten. Da bi dokazali, da je integral za $F(y)$ enakomerno konvergenten na poltraku $[0, \infty)$ (torej konvergenten tudi v 0, bomo uporabili drugi izrek o povprečju za funkciji $f(x) = \sin x$ in $g(x) = \frac{e^{-xy}}{x}$. Po tem izreku imamo za poljubna $b > a \geq 0$ (pri vsakem fiksnem $y \geq 0$)

$$\int_a^b \sin x \frac{e^{-xy}}{x} dx = \frac{e^{-ay}}{a} \int_a^b \sin x dx.$$

Iz grafa funkcije $\sin$ vidimo (ker se ploščine pod absciso delno uničijo s tistimi nad absciso), da je $|\int_a^b \sin x dx| \leq |\int_0^\pi \sin x| = 2$ za poljubna $a, b \in \mathbb{R}$, zato iz gornje enakosti sledi, da je

$$\int_a^b \left| \sin x \frac{e^{-xy}}{x} \right| dx \leq 2 \frac{e^{-ay}}{a} \leq \frac{2}{a}$$

za vse $y \geq 0$ in $a > 0$. Po eni prejšnjih trditev to pomeni, da je integral za F enakomerno konvergenten na $[0, \infty)$, torej je F zvezna funkcija (tudi v točki 0).

Da bi integral izračunali, opazimo, da je

$$F'(y) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y} (e^{-xy} \frac{\sin x}{x}) dx = - \int_0^\infty e^{-xy} \sin x dx,$$

saj je zadnji integral enakomerno konvergenten na vsakem poltraku $y \in [\delta, \infty)$, $\delta > 0$, vsak $y > 0$ pa je v kakem takem poltraku. Zadnji integral lahko izračunamo z dvakratnim integriranjem per partes (kot ste to storili pri analizi 1) in dobimo

$$F'(y) = -\frac{1}{1+y^2}.$$

Torej je $F(y) = -\arctg y + C$, kjer je C konstanta. Konstanto C lahko določimo, ko opazimo, da gre $F(y)$ proti 0, ko gre y proti ∞ . (Velja namreč $|F(y)| \leq \int_0^\infty e^{-xy} dx = \frac{1}{y}$, ker je $\left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq 1$.) Torej je $0 = -\frac{\pi}{2} + C$, zato $C = \frac{\pi}{2}$. Tako smo izračunali, da je

$$F(y) = \frac{\pi}{2} - \arctg y$$

za vse $y > 0$. Ker je F zvezna v točki 0, sledi, da je $F(0) = \pi/2$. Torej

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Naloga. Izračunajte $\int_0^\infty \frac{\sin yx}{x} dx$.

8. VEČKRATNI INTEGRALI

V enem prejšnjih razdelkov smo že definirali dvojni integral po pravokotniku. Podobno definiramo trojni integral po kvadru.

Definicija 8.1. Naj bo $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ omejena funkcija, definirana na kvadru $K = [a, b] \times [c, d] \times [e, g]$ v $\mathbb{R}^3$. Vse tri intervale $[a, b]$, $[c, d]$ in $[e, g]$ razdelimo na podintervale z delilnimi točkami:

$$a = x_0 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_m = b,$$

$$c = y_0 < \dots < y_{j-1} < y_j < \dots < y_n = d,$$

$$e = z_0 < \dots < z_{k-1} < z_k < \dots < z_p = g.$$

S tem razdelimo kvader K na manjše podkvadre

$$K_{i,j,k} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k];$$

to delitev imenujmo D . Označimo

$$m_{i,j,k} = \inf_{(x,y,z) \in K_{i,j,k}} f(x,y,z) \text{ in } M_{i,j,k} = \sup_{(x,y,z) \in K_{i,j,k}} f(x,y,z)$$

ter tvorimo *spodnjo* in *zgornjo Riemannovo vsoto* pri tej delitvi:

$$\underline{S}_D = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p M_{i,j,k} \Delta_{i,j,k} V \text{ in } \bar{S}_D = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p m_{i,j,k} \Delta_{i,j,k} V,$$

kjer je

$$\Delta_{i,j,k} V = \Delta_i x \Delta_j y \Delta_k z = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$$

prostornina kvadra $K_{i,j,k}$. Končno naj bo

$$\underline{S} = \sup_D \underline{S}_D \text{ in } \bar{S} = \inf_D \bar{S}_D,$$

kjer teče D po vseh takih delitvah kvadra K . Če je $\underline{S} = \bar{S}$ pravimo, da je funkcija f *integrabilna na kvadru K* in skupno vrednost $\underline{S} = \bar{S}$ označimo kot

$$\iiint_K f(x,y,z) dV$$

ter jo imenujemo *trojni (Riemannov) integral funkcije f* .

Podobno kot za dvojne integrale lahko tudi tukaj pokažemo, da je vedno $\underline{S}_D \leq \bar{S}_D$, da pri nadaljevanju delitve spodnja vsota naraste (ne nujno strogo), gornja vsota pade, da je vedno $\underline{S} \leq \bar{S}$ in da trojni integral obstaja za vsako zvezno funkcijo na kvadru K ter da velja

$$\iiint_K f(x,y,z) dV = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^g f(x,y,z) dz \right) dy \right) dx$$

skupaj s podobnimi formulami v katerih je zamenjan vrstni red trikratnih integralov. Kako pa bi definirali integrale po splošnejših podmnožicah v $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$, ki niso pravokotniki ali kvadri?

Definicija 8.2. Naj bo Ω poljubna omejena podmnožica v $\mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ pa omejena funkcija. Izberimo kvader K (oziroma pravokotnik, če je $n = 2$, ter interval, če je $n = 1$) oblike $K = [a, b] \times [c, d] \times \dots$, ki naj vsebuje Ω , definirajmo funkcijo $f_K : K \rightarrow \mathbb{R}$ kot

$$f_K(x, y, \dots) = \begin{cases} f(x, y, \dots), & (x, y, \dots) \in \Omega; \\ 0, & (x, y, \dots) \in K \setminus \Omega \end{cases}$$

ter večkratni integral $\int \dots \int_{\Omega} f(x, y, \dots) dV$ kot

$$\int \dots \int_{\Omega} f(x, y, \dots) dV = \int \dots \int_K f_K(x, y, \dots) dV.$$

Ni težko pokazati, da je ta definicija trojnega integrala pa množici Ω neodvisna od izbire kvadra K , ki vsebuje Ω . (Tj., če izberemo drug kvader H , ki vsebuje Ω , je $\int \dots \int_H f_H(x, y, \dots) dV = \int \dots \int_K f_K(x, y, \dots) dV$.) Vprašanje obstoja takega integrala pa je težje. Ni namreč dovolj, da je funkcija f zvezna (ali splošneje, **da ima množica njenih točk nezveznosti mero 0**), temveč nam šele dodatna predpostavka, **da ima tudi rob $\partial\Omega$ množice Ω mero 0**, zagotavlja obstoj večkratnega Riemannovega integrala na Ω . (Naj spomnimo, da ima podmnožica A v $\mathbb{R}^n$ mero 0, če jo je mogoče za vsak $\varepsilon > 0$ pokriti s kakim zaporedjem kvadrov, katerih vsota prostornin je pod ε .) Vendar se tukaj ne bomo ukvarjali z dokazovanjem obstoja integrala, temveč nas bo zanimalo predvsem, kako ga izračunati v konkretnih primerih. Omenimo le, da imata vsaka taka krivulja v $\mathbb{R}^n$ za $n \geq 2$ ali pa ploskev v $\mathbb{R}^n$ za $n \geq 3$, ki ju je mogoče parametrizirati z zvezno odvedljivimi funkcijami, mero 0.

Osnovne lastnosti večkratnih integralov so podobne kot pri običajnem Riemannovem integralu, tudi dokazi so podobni, zato jih bomo pustili za naloge. V vseh naslednjih trditvah privzamemo, da so množice Ω omejene, njihov rob ima mero 0, funkcije $f, g, \dots$ na Ω pa zvezne (razen morda na množici z mero 0).

Trditev 8.3. Če ima presek omejenih množic Ω_1 in Ω_2 v $\mathbb{R}^2$ (ali v $\mathbb{R}^n$) mero 0, potem je

$$\int \dots \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f(x_1, \dots, x_n) dV = \int \dots \int_{\Omega_1} f(x_1, \dots, x_n) dV + \int \dots \int_{\Omega_2} f(x_1, \dots, x_n) dV.$$

Trditev 8.4. $\int \dots \int_{\Omega} (c_1 f_1 + c_2 f_2) dV = c_1 \int \dots \int_{\Omega} f_1 dV + c_2 \int \dots \int_{\Omega} f_2 dV$ za (zvezni) funkciji f_1 in f_2 na Ω in poljubni konstanti c_1 in c_2 .

Trditev 8.5. Če je $f \leq g$, potem je $\iint_{\Omega} f dp \leq \iint_{\Omega} g dp$ in podobno za večkratne integrale. Če je torej funkcija f omejena na množici Ω navzgor s konstanto M , navzdol pa s konstanto m , potem je $mp_{\Omega} \leq \iint_{\Omega} f dp \leq Mp_{\Omega}$, kjer je p_{Ω} ploščina množice Ω .

Trditev 8.6. $|\iint_{\Omega} f dp| \leq \iint_{\Omega} |f| dp$.

Trditev 8.7. Naj bo Ω kompaktna množica v $\mathbb{R}^2$, katere rob sestoji iz končno mnogo krivulj oblike $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ za kake zvezno odvedljive funkcijo $\vec{r}$ in kake intervale $[a, b]$. Izberimo pravokotnik P , ki vsebuje Ω , in naj bo D poljubna delitev tega pravokotnika s premicami, vzporednimi koordinatnima osema. V vsakem od tistih delilnih pravokotnikov P_k delitve D , ki sekajo Ω , izberimo točko $\vec{r}_k \in P_k \cap \Omega$, označimo z $\Delta_k p$ ploščino pravokotnika P_k in za dano funkcijo f na Ω tvorimo Riemannovo vsoto

$$S_D(f) = \sum_k f(\vec{r}_k) \Delta_k p,$$

kjer teče indeks k le po tistih delilnih pravokotnikih P_k , ki sekajo Ω . Za vsako zvezno funkcijo f na Ω je integral $\iint_{\Omega} f(\vec{r}) dp$ enak limiti vsot $S_D(f)$, ko gredo velikosti vseh delilnih pravokotnikov (tj. največja diagonala vseh delilnih pravokotnikov) proti 0. Natančneje, za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$|S_D(f) - \iint_{\Omega} f(\vec{r}) dp| < \varepsilon,$$

če je maksimalna diagonala delilnih pravokotnikov P_k pod δ .

Dokaz. Po definiciji je $\iint_{\Omega} f(\vec{r}) dp = \iint_P f_P(\vec{r}) dp$, kjer je f_P funkcija na P , definirana z $f_P|_{\Omega} = f$ in $f_P|(P \setminus \Omega) = 0$. Ker je funkcija f_P enaka 0 zunaj množice Ω , nastopajo v zgornji in spodnji Riemannovi vsoti funkcije f_P pri vsaki delitvi D pravokotnika P le tisti členi, pri katerih delilni pravokotniki sekajo Ω . Premislimo sedaj, kako iz našega privzetka o robu množice Ω sledi, da so pravzaprav pomembni le tisti členi, pri katerih so delilni pravokotniki vsebovani v Ω .

Predpostavimo lahko, da so robne krivulje parametrizirane z naravnim parametrom, tako da je povsod na vsaki taki krivulji tangentni vektor $\dot{\vec{r}}(s)$ neničeln, zato se da v okolici vsake točke na krivulji ena od koordinat x ali y izraziti kot funkcija druge (po izreku o implicitni funkciji). Od tod sledi (zaradi kompaktnosti krivulj), da je vsaka od robnih krivulj končna unija grafov funkcij ene spremenljivke, kar ima za posledico, da je pri vsaki dovolj drobni delitvi D vsota ploščin tistih delilnih pravokotnikov, ki sekajo rob množice K , manjša od poljubnega, vnaprej predpisane $\varepsilon > 0$. Ker je funkcija f omejena, je prispevek takih členov k Riemannovi vsoti (spodnji, zgornji ali katerikoli vmesni) tako majhen kot želimo, če je le delitev dovolj drobna. Integral $\iint_P f_P dp$ je torej enak skupni limiti gornjih in spodnjih Riemannovih vsot oblike $\sum_k^{\circ} M_k \Delta_k p$ in oblike $\sum_k^{\circ} m_k \Delta_k$, kjer teče vsota le po tistih k , pri katerih je delilni pravokotnik P_k vsebovan v notranjosti množice Ω . (Tukaj je seveda M_k supremum, m_k pa infimum funkcije f na takem pravokotniku P_k .) Enaka redukcija velja tudi za vsako drugo Riemannovo vsoto, ki je med zgornjo in spodnjo, zato morajo tudi take vsote konvergirati proti $\iint_{\Omega} f(\vec{r}) dp$. $\square$

Formulacijo trditvi 8.7 analogne trditve v $\mathbb{R}^3$ (in v $\mathbb{R}^n$ za $n \geq 3$) in njen dokaz bomo prepustili bralcu.

Naj bo Ω podana kot

$$(8.1) \quad \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g_1(x) \leq y \leq g_2(x), a \leq x \leq b\},$$

kjer sta g_1 in g_2 zvezni funkciji na intervalu $[a, b]$ in $g_1(x) \leq g_2(x)$ za vsak $x \in [a, b]$. Naj bosta M_1 in M_2 taki števili, da pravokotnik $P = [a, b] \times [M_1, M_2]$ vsebuje

množico Ω (torej $M_1 \leq g_1(x) \leq g_2(x) \leq M_2$ za vsak $x \in [a, b]$). Po definiciji imamo potem za vsako zvezno funkcijo $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$: $\iint_{\Omega} f(x, y) dp = \iint_P f_P(x, y) dp$, kjer je f_P funkcija na P , definirana z

$$f_P(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in \Omega, \\ 0, & (x, y) \in P \setminus \Omega. \end{cases}$$

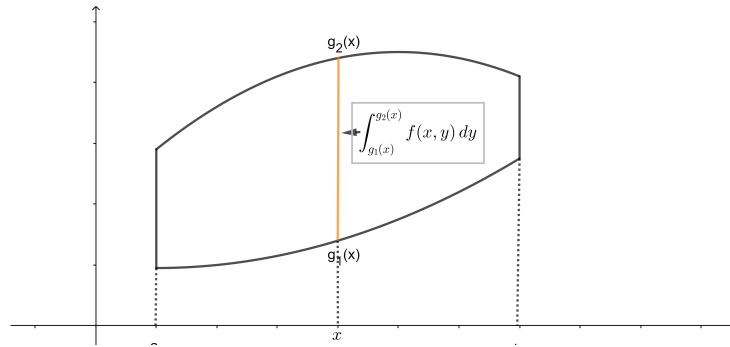
Po izreku (6.3) pa je

$$\iint_P f_P(x, y) dp = \int_a^b \left(\int_{M_1}^{M_2} f_P(x, y) dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx,$$

kjer smo upoštevali, da je funkcija f_P enaka 0 izven Ω in zato $\int_{M_1}^{M_2} f_P(x, y) dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy$. Torej velja naslednja trditev:

Trditev 8.8. Za vsako zvezno funkcijo f na množici Ω , podani z (8.1), velja

$$(8.2) \quad \iint_{\Omega} f(x, y) dp = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$



SLIKA 15. Prevedba dvojnega integrala na dvakratnega:

$$\iint_P f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Seveda velja za množice oblike

$$(8.3) \quad \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g_1(y) \leq x \leq g_2(y), c \leq y \leq d\}$$

podoben zaključek, namreč

$$(8.4) \quad \iint_{\Omega} f(x, y) dp = \int_c^d \left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Pri računanju integralov po splošnejših ravninskih množicah pa si lahko pomagamo tako, da množico razrežemo na dele, ki imajo obliko (8.1) ali (8.4).

Zgled 8.9. (i) Naj bo $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x-1 \leq y \leq 2x, 2 \leq x \leq 4\}$. Izračunajmo

$$\iint_{\Omega} xy dp.$$

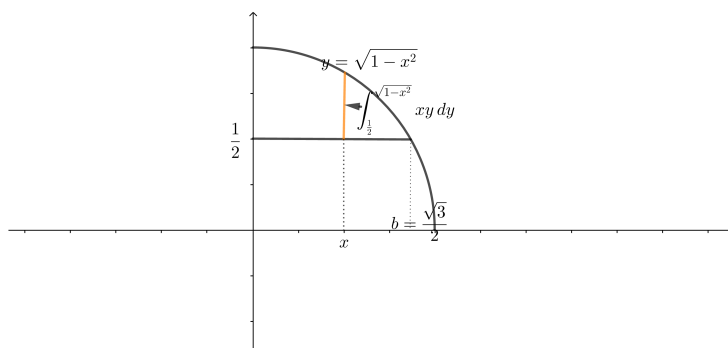
Po (8.2) imamo

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} xy \, dp &= \int_2^4 \left(\int_{x-1}^{2x} xy \, dy \right) dx = \int_2^4 x \left(\frac{y^2}{2} \Big|_{y=x-1}^{y=2x} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_2^4 x (4x^2 - (x-1)^2) dx = \frac{1}{2} \int_2^4 (3x^3 + 2x^2 - x) dx \\ &= \left[\frac{3}{8}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 \right]_2^4 = \frac{317}{3}.\end{aligned}$$

(ii) Spet izračunajmo $\iint_{\Omega} xy \, dp$, le da je tokrat

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq \frac{1}{2}\}.$$

Premica $y = \frac{1}{2}$ seka krožnico $x^2 + y^2 = 1$ v točki z absciso b , ki jo izračunamo iz



SLIKA 16. Zgled 2

pogojev $b^2 + (\frac{1}{2})^2 = 1$, $b \geq 0$. Dobimo $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Torej je

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} xy \, dp &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} x \left(\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{1-x^2}} y \, dy \right) dx = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (x - x^3 - \frac{x}{4}) dx = \left[-\frac{x^4}{8} + \frac{3x^2}{16} \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{9}{8 \cdot 16} + \frac{2 \cdot 9}{8 \cdot 16} = \frac{9}{128}.\end{aligned}$$

Naloga. Izračunajte integral iz zgleda (ii) tako, da integrirate najprej po x in nato po y .

Oglejmo si še formulo za računanje trojnih integralov, ki je analogna formuli (8.2). Naj bo Ω omejena podmnožica v $\mathbb{R}^3$, podana kot

$$(8.5) \quad \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y), (x, y) \in \Lambda\},$$

kjer sta g_1 in g_2 zvezni realni funkciji, definirani na ravninski množici Λ , in $g_1(x, y) \leq g_2(x, y)$ za poljubno točko $(x, y) \in \Lambda$. Pri tem bomo privzeli, da ima rob množice Λ mero 0 (npr., da je Λ podana na enega od načinov (8.1), (8.3)). Naj bo $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

(zvezna) funkcija, $K = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ kvader, ki naj vsebuje Ω , f_K pa funkcija, definirana z

$$f_K(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z), & (x, y, z) \in \Omega; \\ 0, & (x, y, z) \in K \setminus \Omega. \end{cases}$$

Po definiciji in po analogiji izreka 6.3 v treh spremenljivkah (ki ga dokažemo na enak način) je

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iiint_K f_K(x, y, z) dV = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_3}^{b_3} f_K(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

Ker je funkcija f_K enaka 0 zunaj množice Ω , na Ω pa se ujema z f , je

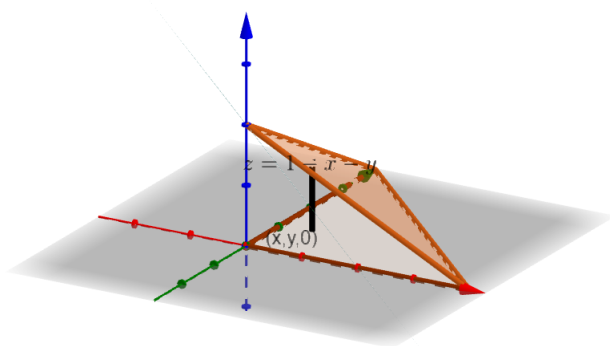
$$F(x, y) := \int_{a_3}^{b_3} f_K(x, y, z) dz = \int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

in funkcija F je enaka 0 zunaj množice Λ , zato je $\int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} F(x, y) dy \right) dx = \iint_{\Lambda} F(x, y) dp$. Tako dobimo končno, da velja:

Trditev 8.10. *Za območja Ω , podana z (8.5), in (skoraj povsod) zvezne funkcije f na njih velja*

$$(8.6) \quad \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iint_{\Lambda} \left(\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dp.$$

Zgled 8.11. Prevedimo s pomočjo formule (8.6) na trikratni integral trojni integral po piramidi Ω z oglišči $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ in $(0, 0, 1)$ za poljubno zvezno funkcijo $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Tukaj je Λ (projekcija piramide na ravnino x, y) trikotnik,



SLIKA 17. Trojni integral po piramidi

omejen z osema x in y ter premico skozi oglišči $(1, 0, 0)$ in $(0, 1, 0)$. Integral po z bo tekkel vsakokrat od točke $(x, y, 0)$ do točke (x, y, z) na stranski ploskvi piramide

skozi oglišča $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ in $(0, 0, 1)$. Ker je enačba ravnine skozi ta tri oglišča $x + y + z = 1$, teče z torej od 0 do $1 - x - y$, zato imamo

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iint_{\Lambda} \left(\int_0^{1-x-y} f(x, y, z) dz \right) dp.$$

Sedaj moramo izraziti še dvojni integral po trikotniku Λ z dvakratnim integralom. Pri danem $x \in [0, 1]$ teče y od 0 do točke na stranici trikotnika skozi oglišči $(1, 0)$ in $(0, 1)$, se pravi do $1 - x$. Tako dobimo

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

V posebnem primeru, ko je funkcija f identično enaka 1 na Ω , je integral na levi strani zadnje formule enak prostornini V piramide, kar nam pove, da je

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} dz \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1-x-y) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left[(1-x)y - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} dx = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

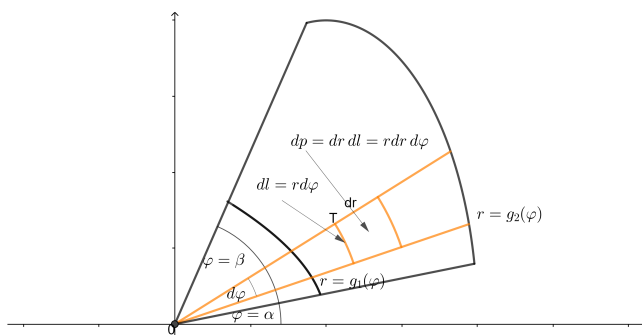
Naloga. Izpeljite formulo za prostornino splošne piramide.

9. RAČUNANJE INTEGRALOV V POLARNIH KOORDINATAH

9.1. Polarne koordinate. Kadar je ravninska množica Ω omejena z dvema poltrakoma iz izhodišča in dvema krivuljama, podanima v polarnih koordinatah kot $r = g_1(\varphi)$ in $r = g_2(\varphi)$, kjer sta g_1 in g_2 zvezni funkciji na intervalu $[\alpha, \beta]$, se pravi, da je

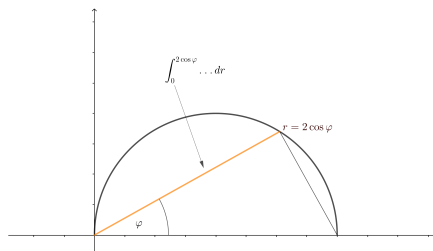
$$(9.1) \quad \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, g_1(\varphi) \leq r \leq g_2(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta\},$$

je dvojni integral $\iint_{\Omega} f(x, y) dp$ lažje računati v polarnih kot v kartezičnih koordinatah. Množico Ω razdelimo na majhne dele s *koordinatnimi krivuljami* oblike $r = \text{konst.}$ (to so krožnice) in $\varphi = \text{konst.}$ (to so poltraki). Iz slike vidimo, da je



SLIKA 18. Ploščinski element v polarnih koordinatah

ploščina majhnega, pravokotniku podobnega, lika enaka $dp = dl dr$, kjer je $dl = r d\varphi$



SLIKA 19. Integriranje po polkrogu v polarnih koordinatah

dolžina majhnega dela krožnega loka, pri čemer je r dolžina daljice od 0 do T . Ta krožni lok sicer ni raven in zato pri računanju ploščine lika (ki ni natančno pravokotnik) zagrešimo napako, ki je tem manjša, čim manjši je lik. Ko celo območje Ω razdelimo na take like, v vsakem izberemo eno točko $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ in napišemo vsoto s členi oblike $f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dp = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$ ter pri tem seštevamo vsakokrat najprej pri fiksnem φ , spoznamo, da velja

$$(9.2) \quad \iint_{\Omega} f(x, y) dp = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{g_1(\varphi)}^{g_2(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr \right) d\varphi.$$

Ta formula je le poseben primer splošne zamenjave spremenljivk v dvojnem integralu, ki jo bomo spoznali v naslednjem razdelku, zato je na tem mestu ne bomo podrobno dokazovali.

Zgled 9.1. Izračunajmo

$$\iint_{\Omega} x dp,$$

kjer je Ω polkrog s polmerom 1 in središčem $(1, 0)$. Po Talesovem izreku je kot nad premerom pravi, zato je enačba robne polkrožnice $r = 2 \cos \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Torej je po formuli (9.2)

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} x dp &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2 \cos \varphi} r r \cos \varphi dr \right) d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^{2 \cos \varphi} \cos \varphi d\varphi = \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi d\varphi \\ &= \frac{8}{12} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2\varphi))^2 d\varphi = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2 \cos(2\varphi) + \cos^2(2\varphi)) d\varphi \\ &= \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(4\varphi)}{2} d\varphi = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Zgled 9.2. Izračunajmo integral

$$\iint_{\Omega} e^{-x^2-y^2} dp,$$

kjer je Ω krog s središčem 0 in polmerom A . Ker je $x^2 + y^2 = r^2$, je po formuli (9.2)

$$\iint_{\Omega} e^{-x^2-y^2} dp = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^A e^{-r^2} r dr \right) d\varphi.$$

Notranji integral je neka konstanta, ki jo lahko nesemo pred integral po kotu φ , s čimer dobimo

$$\iint_{\Omega} e^{-x^2-y^2} dp = \int_0^A e^{-r^2} r dr \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \int_0^{A^2} e^{-u} \frac{du}{2} = \pi(1 - e^{-A^2}).$$

Ko pošljemo A proti ∞ , sledi od tod

$$(9.3) \quad \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dp = \pi.$$

Levo stran te enakosti lahko izrazimo kot dvakratni integral v kartezičnih koordinatah

$$(9.4) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dy \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right) dx.$$

(Strogo vzeto, bi morali najprej integrirati po velikih kvadratih in limitirati velikost kvadratov proti ∞ , ker smo izražanje dvojnega integrala z dvakratnim obravnavali le na omejenih območjih.) Notranji integral v (9.4) je neka konstanta, ki jo lahko prestavimo pred integral po spremenljivki x ; tako postane izraz (9.4) produkt dveh enakih integralov in iz (9.3) potem sledi, da je

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \pi.$$

Ker je $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$, smo s tem dokazali formulo

$$(9.5) \quad \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Naloga. Izračunajte $\iint_{\Omega} \frac{xy}{x^2+y^2} dp$, kjer je Ω tisti del kolobarja $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$, ki leži nad premico $y = x$.

10. CILINDRIČNE ALI VALJNE KOORDINATE

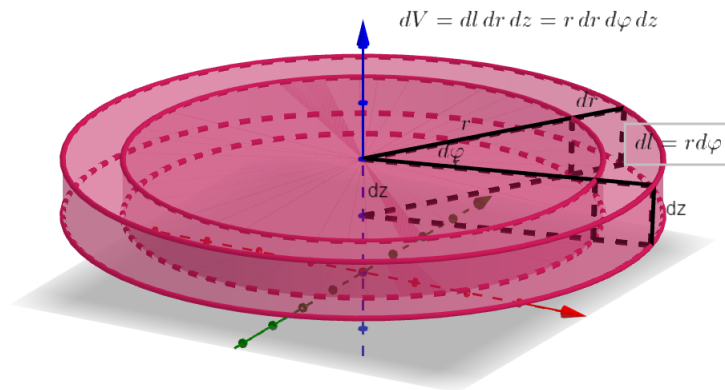
Lega točke (x, y, z) v prostoru $\mathbb{R}^3$ je določena s koordinato z in polarnima koordinatama r, φ njene projekcije $(x, y, 0)$ na ravnino x, y . Trojko φ, r, z imenujemo *cilindrične* ali *valjne koordinate* točke. S kartezičnimi koordinatami so povezane prek enakosti

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z.$$

Pri tem lahko r zavzame vse nenegativne vrednosti, z vse realne vrednosti, φ pa na intervalu $[0, 2\pi)$. Za dano točko T pomeni r njeno razdaljo od osi z , ki je enaka razdalji projekcije točke T na ravnino x, y od koordinatnega izhodišča.

Poglejmo, kaj so *koordinatne ploskve*. Ploskve $z = \text{konst.}$ so ravnine, vzporedne z ravnino x, y . Ploskve $r = \text{konst.}$ so neskončni valji, katerih os je os z . Ploskve $\varphi = \text{konst.}$ pa so polravnine.

Oglejmo si, kako lahko računamo integrale v cilindričnih koordinatah. Najprej moramo ugotoviti, kako se izraža *volumni element*, tj. volumen majhnega telesa, omejenega s koordinatnimi ploskvami. Osnovna ploskev tega prizmi podobnega telesa je taka kot pri ploskovnem elementu v polarnih koordinatah, torej



SLIKA 20. Volumni element v valjnih koordinatah

ima ploščino $dp = r dr d\varphi$. Višina telesa pa je dz , zato je njegova prostornina $dV = dp dz = r dr d\varphi dz$. Trojni integral po telesu v $\mathbb{R}^3$, podanem kot

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g_1(r, \varphi) \leq z \leq g_2(r, \varphi), (x, y) \in \Lambda\},$$

kjer je $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$, g_1 in g_2 pa zvezni funkciji na Λ in $g_1 \leq g_2$, lahko torej izrazimo kot

$$(10.1) \quad \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iint_{\Lambda} \left(\int_{g_1(r, \varphi)}^{g_2(r, \varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dz \right) dr d\varphi.$$

Ta formula bo tudi posledica splošnejše zamenjave spremenljivk v trojnem integralu, ki jo bomo spoznali v naslednjem razdelku.

Zgled 10.1. Poiščimo maso telesa, ki ga omejujeta valj $x^2 + y^2 = a^2$ ter ravnini $z = 0$ in $z = b$, kjer sta a in b pozitivni konstanti, če je gostota podana kot $\rho(x, y, z) = x^2$.

Po definiciji gostota ρ pomeni maso na enoto volumna, torej $\rho = \frac{dm}{dV}$, zato je $dm = \rho dV$ in masa telesa Ω je

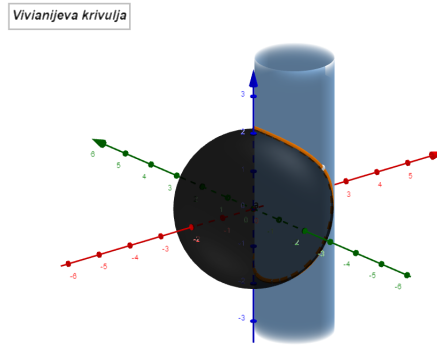
$$(10.2) \quad m = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dV.$$

Po formuli (10.1) imamo tako za maso našega valja

$$m = \iint_{\Lambda} \left(\int_0^b (r \cos \varphi)^2 r dz \right) dr d\varphi,$$

kjer je Λ krog $x^2 + y^2 \leq a^2$. Dvojni integral po Λ sedaj izrazimo v polarnih koordinatah, da dobimo

$$m = \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^b r^3 \cos^2 \varphi dz dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^a br^3 \cos^2 \varphi dr d\varphi$$



SLIKA 21. Presek valja in krogle

$$= \frac{a^4 b}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{a^4 b}{8} \int_0^{2\pi} (1 + \cos(2\varphi)) d\varphi = \frac{\pi a^4 b}{4}.$$

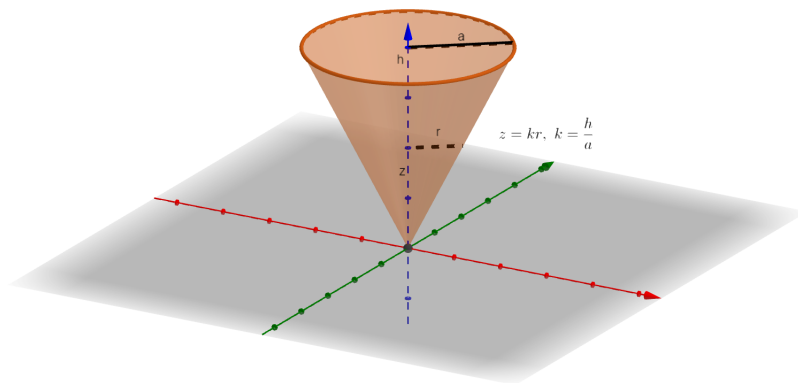
Zgled 10.2. Poiščimo prostornino tistega dela krogle $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, ki leži znotraj valja $r = a \cos \varphi$ ($a > 0$).

Kot že vemo, predstavlja enačba $r = a \cos \varphi$ v ravnini x, y krožnico s središčem $(\frac{a}{2}, 0)$ in polmerom $\frac{a}{2}$; v prostoru pa imamo pri vsakem fiksnem z (torej v vsaki ravnini, vzporedni z ravnino x, y) eno tako krožnico, ki tvorijo skupaj plašč valja. V prostoru torej predstavlja enačba $r = a \cos \varphi$ plašč neskončnega valja, katerega os je premica $x = \frac{a}{2}, y = 0$. Ta valj izreže iz krogle neko telo, ki je simetrično glede na ravnino x, y , zato je njegova prostornina dvakratni prostornine zgornje polovice, kjer bo torej spremenljivka z tekla od 0 do površine krogle, se pravi do $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{a^2 - r^2}$. Če označimo z Ω zgornjo polovico telesa, imamo tako

$$V = 2 \iiint_{\Omega} dV = 2 \iint_{\Lambda} \left(\int_0^{\sqrt{a^2 - r^2}} r dz \right) dr d\varphi,$$

kjer je Λ krog v ravnini x, y , katerega rob ima enačbo $r = a \cos \varphi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Ko izrazimo dvojni integral po Λ v polarnih koordinatah, sledi

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \cos \varphi} \int_0^{\sqrt{a^2 - r^2}} r dz dr d\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \cos \varphi} \int_0^{\sqrt{a^2 - r^2}} r dz dr d\varphi \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \cos \varphi} \sqrt{a^2 - r^2} r dr d\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{3} (a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{a \cos \varphi} d\varphi \\ &= \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [a^3 - (a^2 - a^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}] d\varphi = \frac{4}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \varphi) d\varphi \\ &= \frac{4}{3} a^3 \left(\frac{\pi}{2} + \int_0^1 (1 - t^2) dt \right) = \frac{4}{3} a^3 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3} \right) = \frac{2}{9} a^3 (3\pi + 4). \end{aligned}$$



SLIKA 22. Stožec

Zgled 10.3. Izračunajmo vztrajnostni moment stožca glede na njegovo os.

Izberimo koordinatni sistem tako, da bo vrh stožca v izhodišču, os stožca pa na osi z . Naj bo h višina stožca, a pa polmer njegove osnovne ploskve. Enačba takega stožca v cilindričnih koordinatah je $z = kr$, kjer je $k = \frac{h}{a}$ (saj sta obe razmerji $\frac{z}{r}$ in $\frac{h}{a}$ enaki kotangensu polovičnega kota ob vrhu stožca).

Vztrajnostni moment majhnega dela telesa s prostornino dV , ki je od osi z oddaljen za r , je

$$dJ = r^2 dm = \rho r^2 dV,$$

kjer je ρ gostota. Vztrajnostni moment celotnega telesa Ω je zato

$$(10.3) \quad J = \iiint_{\Omega} \rho r^2 dV.$$

Za stožec dobimo od tod v cilindričnih koordinatah

$$J = \iint_{\Lambda} \left(\int_{kr}^h \rho r^2 dz \right) r dr d\varphi,$$

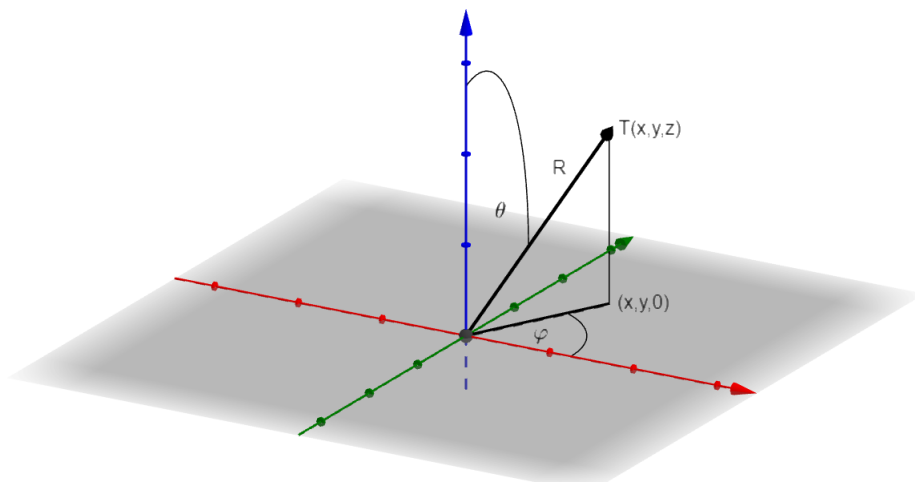
kjer je Λ krog $x^2 + y^2 \leq a^2$ v ravnini x, y . Ko izrazimo dvojni integral po Λ v polarnih koordinatah, dobimo, če privzamemo, da je gostota ρ konstantna,

$$J = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^a r^3 (h - kr) dr d\varphi = 2\pi\rho \int_0^a (hr^3 - kr^4) dr = 2\pi\rho \left(\frac{ha^4}{4} - \frac{ka^5}{5} \right).$$

Ko upoštevamo, da je $k = \frac{h}{a}$, se to poenostavi v

$$J = \frac{1}{10} \rho \pi a^4 h.$$

Ker je masa stožca $m = \rho V = \rho \frac{\pi a^2 h}{3}$, dobimo končno $J = \frac{3}{10} m a^2$.



SLIKA 23. Sferične koordinate

11. SFERIČNE KOORDINATE

Sferične ali krogelne koordinate točke $T(x, y, z)$ so: razdalja R do izhodišča (tj. $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$), kot θ , ki ga vektor $\vec{OT}$ oklepa s pozitivnim poltrakom osi z , in kot φ , ki ga pravokotna projekcija vektorja $\vec{OT}$ na ravnino x, y oklepa s pozitivnim poltrakom osi x .

Naj bo kot doslej r razdalja točke T do od osi z . Potem je $r = R \sin \theta$ in

$$(11.1) \quad x = R \sin \theta \cos \varphi, \quad y = R \sin \theta \sin \varphi, \quad z = R \cos \theta.$$

Tukaj lahko zavzame kot θ vrednosti na intervalu $[0, \pi]$ (0 je na pozitivnem, π pa na negativnem poltraku osi z), kot φ pa vrednosti na intervalu $[0, 2\pi)$.

Koordinatne ploskve v teh koordinatah so: sfere $R = \text{konst.}$, stožci $\theta = \text{konst.}$ in polravnine $\varphi = \text{konst.}$

Poglejmo še, kako se izraža *volumni element v sferičnih koordinatah*, tj. prostornina “infinitesimalno majhnega” telesa, omejenega s koordinatnimi ploskvami. Iz slike vidimo, da je ta prostornina enaka

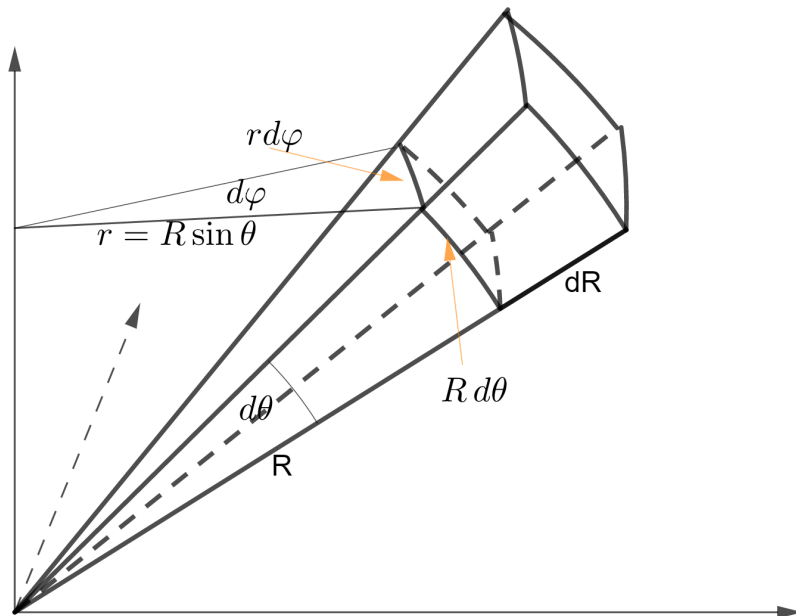
$$dV = R^2 \sin \theta dR d\theta d\varphi.$$

Od tod sledi, da lahko trojni integral po telesu Ω , ki je opisano kot

$$(11.2) \quad \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g_1(\varphi, \theta) \leq R \leq g_2(\varphi, \theta), (\varphi, \theta) \in \Lambda\},$$

kjer sta $g_1 \leq g_2$ zvezni funkciji na množici $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$, izrazimo kot

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV =$$



SLIKA 24. Prostorninski element v sferičnih koordinatah

$$(11.3) \quad \iint_{\Lambda} \left(\int_{g_1(\varphi, \theta)}^{g_2(\varphi, \theta)} f(R \sin \theta \cos \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \theta) R^2 \sin \theta dR \right) d\theta d\varphi.$$

Kot pri cilindričnih koordinatah lahko tudi tukaj omenimo, da je gornja formula le poseben primer splošnejše zamenjave spremenljivk, ki jo bomo spoznali v naslednjem razdelku.

Zgled 11.1. Izračunajmo maso telesa Ω , omejenega s sferama $R = a$ in $R = b$, kjer sta a in b pozitivni konstanti, $a < b$, če je gostota $\rho(R, \theta, \varphi) = \frac{1}{R}$.

Očitno bo pri fiksnih θ in φ razdalja R tekla od a do b , kot θ od 0 do π , φ pa od 0 do 2π . Zato je

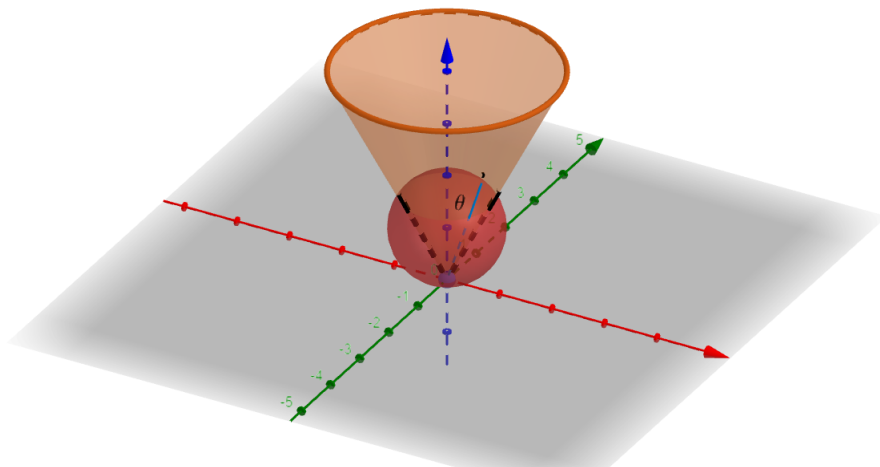
$$\begin{aligned} m &= \iiint_{\Omega} \frac{1}{R} dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_a^b \frac{1}{R} R^2 \sin \theta dR d\theta d\varphi \\ &= \frac{b^2 - a^2}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta d\varphi = \pi(b^2 - a^2) \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = 2\pi(b^2 - a^2). \end{aligned}$$

Ko gre a proti 0 , dobimo, da je masa te "črne luknje" (imenovane tako, ker gre gostota proti ∞ , ko gre R proti 0) enaka $2\pi b^2$.

Zgled 11.2. Določimo prostornino tistega dela krogle $x^2 + y^2 + z^2 \leq z$, ki leži nad stožcem $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$.

Enačbo

$$(11.4) \quad x^2 + y^2 + z^2 = z$$



SLIKA 25. Presek krogle in stožca

lahko napišemo kot $x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$, od koder vidimo, da predstavlja sfero s središčem $(0, 0, \frac{1}{2})$ in polmerom $\frac{1}{2}$. Potrebovali bomo njeno enačbo v sferičnih koordinatah, ki jo dobimo tako, da vstavimo v (11.4) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ in $z = R \cos \theta$. Tako dobimo

$$R = \cos \theta.$$

Podobno dobimo iz enačbe stožca $z^2 = x^2 + y^2$ ($z \geq 0$, da je $R^2 \cos^2 \theta = R^2 \sin^2 \theta$, torej

$$\theta = \frac{\pi}{4},$$

kar je enačba tega stožca v sferičnih koordinatah.

Pri računanju prostornine $V = \iiint_{\Omega} dV$ bo pri fiksnih θ in φ razdalja R tekla od 0 do sfere (torej do $\cos \theta$), kot θ bo tekla od 0 do $\frac{\pi}{4}$, φ pa od 0 do 2π . Torej je

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\cos \theta} R^2 \sin \theta dR d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3} \cos^3 \theta \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{2\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 \theta \sin \theta d\theta, \end{aligned}$$

kjer smo v zadnjem koraku zamenjali vrstni red integriranja po θ in φ . Zadnji integral lahko izračunamo s vpeljavo nove spremenljivke $t = \cos \theta$. Tako dobimo $V = \frac{\pi}{4}$.

12. SPLOŠNE KOORDINATE

Naj bo V odprta podmnožica v ravnini. Vlogo splošnih koordinat na V lahko igra vsak tak par funkcij

$$(12.1) \quad u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$$

na V , da je $(u(x, y), v(x, y)) \neq (u(x_1, y_1), v(x_1, y_1))$, če je $(x, y) \neq (x_1, y_1)$. To namreč pomeni, da je točka (x, y) enolično določena s parom $(u(x, y), v(x, y))$. Drugače povedano, vektorska funkcija

$$F : V \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$$

mora biti injektivna. Da bi lahko uporabljali diferencialni račun, bomo predpostavili, da sta funkciji u in v zvezno odvedljivi. Iz izreka o inverzni preslikavi vemo, da potem obrnljivost Jacobijeve matrike $F'(x, y)$ preslikave F zagotavlja injektivnost preslikave F v okolici točke (x, y) , ne zagotavlja pa injektivnosti funkcije F povsod na definicijskem območju V , zato jo je treba posebej privzeti. Teda je, pri pogoju, da je $F'(x, y)$ obrnljiva matrika za vse $(x, y) \in V$, preslikava F dejansko bijekcija (po izreku o inverzni funkciji) na odprto množico $U := F(V)$, inverzna preslikava

$$G := F^{-1} : U \rightarrow V$$

je tudi zvezno odvedljiva in $G'(\vec{q}) = (F'(G(\vec{q})))^{-1}$ za vsak $\vec{q} \in U$.

Pri fiksnih u_0 in v_0 imenujemo krivulje

$$u(x, y) = u_0 \quad \text{in} \quad v(x, y) = v_0$$

koordinatne krivulje.

Ugotoviti želimo, kako se transformirajo dvojni integrali pri vpeljavi splošnih koordinat. Velja naslednji izrek:

Izrek 12.1. *Naj bo $G : U \rightarrow V$ taka zvezno odvedljiva bijekcija, kjer sta U in V odprti podmnožici v $\mathbb{R}^2$, da je $\det G'(\vec{r}) \neq 0$ za vsak $\vec{r} \in U$. Označimo $\vec{r} = (u, v)$ in $G(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$. Naj bo Ω kompaktna podmnožica v V , katere rob naj sestoji iz končno mnogo zvezno odvedljivih krivulj (ali splošneje, naj ima mero 0), f pa naj bo zvezna funkcija na V (razen morda na množici z mero 0). Potem je*

$$(12.2) \quad \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \iint_{G^{-1}(\Omega)} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(u, v) \right| du dv,$$

kjer je

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(u, v) = \det G'(u, v).$$

Podoben izrek (s podobnim dokazom) velja tudi v treh (in tudi v več) dimenzijah, vendar se bomo tukaj zaradi krajšega zapisa v dokazu omejili na podmnožice ravnine. V ta namen bomo množico V razdelili na majhne kvadrate. Preslikava G jih preslika v majhne krivočrtne like in naša prva naloga je, ugotoviti, kako se pri tem spremeni ploščina. Potrebujemo nekaj priprave.

Lema 12.2. *Naj bo $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ obrnljiva linearna preslikava in Λ paralelogram. Potem med ploščinama paralelogramov Λ in $L(\Lambda)$ velja zveza*

$$(12.3) \quad p_{L(\Lambda)} = |\det L| p_{\Lambda}.$$

Enaka povezava velja tudi za vsako kompaktno podmnožico Λ v $\mathbb{R}^2$ (pravzaprav za vsako ravninsko podmnožico, za katero je ploščina definirana).

Dokaz. Postavimo paralelogram Λ tako, da bo eno oglišče v 0, in označimo z $\vec{a}$ in $\vec{b}$ vektorja na straneh paralelograma z začetkom v 0, tako da je $p_\Lambda = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$. Naj bo $[a_{i,j}]$ matrika, ki pripada preslikavi L v bazi $\{\vec{a}, \vec{b}\}$. Potem sta sosednji stranici paralelograma $L(\Lambda)$ na vektorjih $L\vec{a} = a_{1,1}\vec{a} + a_{2,1}\vec{b}$ in $L\vec{b} = a_{1,2}\vec{a} + a_{2,2}\vec{b}$, torej je

$$\begin{aligned} p_{L(\Lambda)} &= \|L\vec{a} \times L\vec{b}\| = \|(a_{1,1}\vec{a} + a_{2,1}\vec{b}) \times (a_{1,2}\vec{a} + a_{2,2}\vec{b})\| \\ &= \|(a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1})\vec{a} \times \vec{b}\| = |\det L|p_\Lambda. \end{aligned}$$

S tem je trditev dokazana za paralelograme, za splošne kompaktne množice pa moramo najprej povedati, kako je definirana njihova ploščina.

Ploščina splošne kompaktne množice Λ v ravnini je definirana takole: za vsako končno pokritje $\mathcal{P} = \{\Lambda_j : j = 1, \dots, n\}$ množice Λ s paralelogrami Λ_j , ki imajo disjunktne notratnjosti, postavimo $p(\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^n p(\Lambda_j)$; naj bo

$$p(\Lambda) = \inf_{\mathcal{P}} p(\mathcal{P}),$$

kjer teče infimum po vseh takih pokritjih. Ker je za vsako tako pokritje $\mathcal{P}$ množice Λ družina $\{L(\Lambda_j) : j = 1, \dots, n\}$ ustrezno pokritje kompaktne množice $L(\Lambda)$ in so vsa ustrezna pokritja množice $L(\Lambda)$ take oblike, sledi iz že dokazanega, da velja enakost (12.3) za vse kompaktne množice Λ v ravnini. $\square$

Splošna zvezno odvedljiva bijekcija $G : U \rightarrow V$ med odprtima množicama v ravnini s povsod obrnljivim odvodom G' preslika (zaprt) paralelogram $\Lambda \subset U$ na omejeno podmnožico $G(\Lambda)$ v V in rob paralelograma na rob množice $G(\Lambda)$. Če je paralelogram zelo majhen, lahko preslikavo G na njem aproksimiramo z afino preslikavo $A(\vec{r}) = G(\vec{r}_0) + G'(\vec{r}_0)(\vec{r} - \vec{r}_0)$, kjer je $\vec{r}_0$ npr. središče paralelograma. Tedaj lahko pričakujemo, da bo lik $G(\Lambda)$ približno paralelogram, torej njegova ploščina približno $|\det G'(\vec{r}_0)|p(\Lambda)$ po lemi 12.2, saj translacija (za vektor $G(\vec{r}_0)$) ne spremeni ploščine. Ideja dokaza izreka 12.1 je naslednja: Razdelimo množico $G^{-1}(\Omega)$ na zelo majhne kvadratke s premicami, vzporednimi koordinatnima osema. Pri tem množice $G^{-1}(\Omega)$ sicer ne moremo v celoti pokriti s kvadrati, vendar ostane nepokrit le ozek del blizu roba (ki je tem ožji, čim manjši so kvadrati), ki ima le majhno ploščino in bo zato le malo vplival na vrednost integrala. Tipičen kvadrater Λ s stranico $du = dv$ ima ploščino $du dv$, preslikava G pa ga preslika v lik $G(\Lambda)$ s ploščino približno enako $|\det G'(u, v)| du dv$, kjer je (u, v) središče kvadrata. Ker je lik $G(\Lambda)$ zelo majhen, je vrednost integrala $\iint_{G(\Lambda)} f dp$ približno enaka $f(G(u, v))p_\Lambda = f(G(u, v))|\det G'(u, v)| du dv$. Integral $\iint_{\Omega} f dp$ je približno enak vsoti integralov $\iint_{\Lambda} f dp$ po vseh takih delilnih kvadratih Λ , torej približno enak vsoti členov oblike $f(G(u, v))|\det G'(u, v)| du dv$. Taka vsota pa konvergira proti $\iint_{G^{-1}(\Omega)} f(G(u, v))|\det G'(u, v)| du dv$. Vendar pa moramo ugotoviti, koliko liki $G(\Lambda)$ dejansko odstopajo od paralelogramov, da se namreč odstopanja ploščin ne akumulirajo v znatno napako, saj gre število členov v Riemannovih vsotah proti ∞ , ko gredo velikosti delilnih kvadratov proti 0.

Lema 12.3. Naj bo $G : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ zvezno odvedljiva injektivna preslikava s povsod obrnljivim odvodom $G'(u, v)$, definirana na odprti množici U , K kompaktna podmnožica v U , $\Lambda = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : |u - a| \leq h, |v - b| \leq h\}$ pa kvadrat s središčem (a, b) in stranico dolžine $2h$, vsebovan v K . Označimo

$$L = G'(a, b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(a, b) & \frac{\partial x}{\partial v}(a, b) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(a, b) & \frac{\partial y}{\partial v}(a, b) \end{bmatrix}$$

in naj bo A preslikava, definirana z $A(u, v) = G(a, b) + L(u - a, v - b)$. Potem za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$ (neodvisen od izbire kvadrata), da za ploščini likov $G(\Lambda)$ in $A(\Lambda)$ velja

$$(12.4) \quad |p_{G(\Lambda)} - p_{A(\Lambda)}| < \varepsilon p_\Lambda,$$

če je $h < \delta$. Ker se preslikavi A in L razlikujeta le za translacijo, lahko v tej oceni nadomestimo A z L .

Dokaz. Koordinatni sistem lahko izberemo tako, da je izhodišče v središču kvadrata, zato smemo vzeti, da je $(a, b) = (0, 0)$. Ker translacija ohranja ploščine likov, smemo predpostaviti, da je tudi $G(a, b) = (0, 0)$, saj lahko preslikavo G nadomestimo s preslikavo $\vec{r} \mapsto G(\vec{r}) - G(\vec{0})$. Za vsak $\vec{v} \in \Lambda$ potem velja

$$G(\vec{v}) = \int_0^1 \frac{d}{dt} G(t\vec{v}) dt = \int_0^1 G'(t\vec{v})\vec{v} dt = \int_0^1 G'(t\vec{v}) dt \vec{v}.$$

Ker je $G'(0)\vec{v} = \int_0^1 G'(\vec{0}) dt \vec{v}$, sledi od tod

$$(12.5) \quad G(\vec{v}) - G'(\vec{0})\vec{v} = \int_0^1 (G'(t\vec{v}) - G'(\vec{0})) dt \vec{v}.$$

Ker je po predpostavki odvod G' zvezna funkcija (torej enakomerno zvezna na kompaktni množici $K \supseteq \Lambda$), za vsak $\eta > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

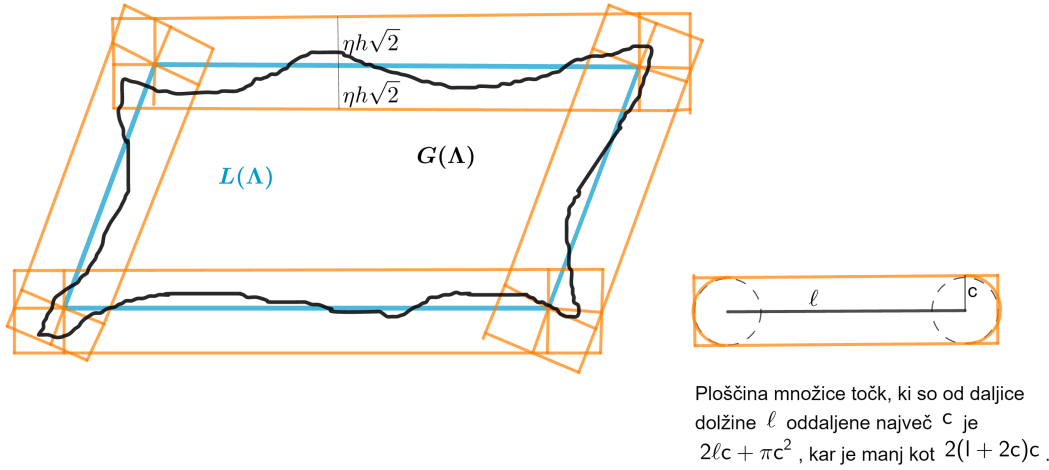
$$(12.6) \quad \|G'(t\vec{v}) - G'(\vec{0})\| < \eta \quad \forall \vec{v} \in \Lambda \quad \forall t \in [0, 1], \text{ če je } h < \delta.$$

Pri tem označuje $\|\cdot\|$ normo matrike, definirano kot $\|[a_{i,j}]\| = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2}$. Lahko je pokazati, da velja $\|A\vec{w}\| \leq \|A\|\|\vec{w}\|$ za vsako matriko A in vektor $\vec{w}$ ter da je $\|\int_0^1 \vec{g}(t) dt\| \leq \int_0^1 \|\vec{g}(t)\| dt$ za vsako zvezno vektorsko funkcijo $\vec{g}$ na $[0, 1]$, zato iz (12.5) in (12.6) sledi

$$(12.7) \quad \|G(\vec{v}) - L\vec{v}\| < \eta \|\vec{v}\| \quad \forall \vec{v} \in \Lambda, \text{ če je } h < \delta,$$

kjer je $L = G'(\vec{0})$. Ko uporabimo to neenakost na vektorjih $\vec{v}$, ki imajo končne točke na straneh kvadrata (začetne pa seveda v $(0, 0)$), spoznamo, da G preslika vsako stranico kvadrata v krivuljo, katere vse točke so oddaljene od ustrezne stranice paralelograma $L(\Lambda)$ za manj kot $\eta h\sqrt{2}$. Ker to velja za vse štiri stranice in so dolžine stranic paralelograma $L(\Lambda)$ enake $\|L(2h(1, 0))\| = 2h\|L(1, 0)\|$ oziroma $\|L(2h(0, 1))\| = 2h\|L(0, 1)\|$, sledi od tod, da se ploščina lika $G(\Lambda)$ v primerjavi s ploščino paralelograma $L(\Lambda)$ ne more spremeniti za več kot $4\eta h\sqrt{2}(2Mh + 2\eta h\sqrt{2})$, kjer je M maksimum norm stolpcev matrike L . Torej velja

$$|p_{G(\Lambda)} - p_{L(\Lambda)}| \leq 8\eta h^2\sqrt{2}(M + \eta\sqrt{2}) = 2\eta\sqrt{2}(M + \eta\sqrt{2})p_\Lambda, \text{ če je } h < \delta.$$



SLIKA 26. Perturbacija paralelograma. Pri tem smo privzeli, da je η dovolj majhen, namreč $\eta h\sqrt{2}$ manjši od polovice manjše višine paralelograma, ki je ploščina p_Λ deljena z večjo stranico, tj. $2h|\det L|/\max\{\|L(1,0)\|, \|L(0,1)\|\}$. Ker je zvezna funkcija $|\det G'|$ na kompaktni množici K navzdol omejena, zvezna funkcija $\|G'\|$ pa navzgor omejena na K , je mogoče tak η določiti tako, da bo ustrezen za vse dovolj majhne kvadrate v K , ne glede na njihovo lego.

Če izberemo η tako majhen, da je $2\eta\sqrt{2}(M + \eta\sqrt{2}) < \varepsilon$, smo s tem dokazali neenakost (12.4), saj je tukaj $(a,b) = \vec{0}$ in $G(a,b) = \vec{0}$, torej $A = L$. Ker sta normi stolpcev matrike G' omejeni funkciji na kompaktni množici K , je mogoče izbrati η tako, da bo ustrezen za vse kvadrate (le v gornji oceni je treba vzeti za M maksimum norm stolpcev vseh matrik $G'(\vec{r})$, ko $\vec{r}$ teče po K). $\square$

Dokaz izreka 12.1. Uporabljali bomo zapisa $\vec{q} = (u,v)$ in $\vec{r} = (x,y)$. Po dokazu trditvi 8.7 je

$$\iint_{G^{-1}(\Omega)} f(G(\vec{q})) |\det G'(\vec{q})| du dv = \lim_{\Delta_D \rightarrow 0} S_D^\circ,$$

kjer je Δ_D dolžina največje diagonale delilnih kvadratov P_k delitve D in v vsoti

$$(12.8) \quad S_D^\circ = \sum_k f(G(\vec{q}_k)) |\det G'(\vec{q}_k)| \Delta_k p, \quad (\vec{q}_k \in P_k \cap \Omega)$$

upoštevamo le tiste delilne kvadrate, ki so vsebovani v notranjosti množice $G^{-1}(\Omega)$. (Pri tem opazujemo le delitve, pri katerih so vsi delilni pravokotniki kvadrati, saj morajo Riemannove vsote že pri vseh takih delitvah konvergirati proti ustreznemu dvojnemu integralu, ko gredo velikosti delilnih kvadratov proti 0.) Preslikava G preslika vsakega od teh kvadratov P_k v množico $G(P_k)$, vsebovano v notranjosti množice Ω . Naj bo Ω_D unija vseh $G(P_j)$, kjer so P_j vsi tisti delilni kvadrati, ki so

vsebovani v notranjsosti množice $G^{-1}(\Omega)$. Ker je razlika $\Omega \setminus \Omega_D$ vsebovana v uniji slik $G(P_l)$ tistih delilnih kvadratov P_l , ki sekajo rob $\partial G^{-1}(\Omega)$ množice $G^{-1}(\Omega)$, vsota plosčin vseh takih kvadratov pa je lahko poljubno majhna, če je le delitev D dovolj drobna, sledi iz lem 12.3 in 12.2, da je tudi vsota $\sum_l p_{G(P_l)}$ plosčin likov $G(P_l)$ poljubno majhna, če je delitev D dovolj drobna. Po lemi 12.3 je namreč

$$|p_{G(P_l)} - p_{L_l(P_l)}| < \varepsilon p_{P_l},$$

kjer je $L_l = G'(\vec{q}_l)$ in $\vec{q}_l$ središče kvadrata P_l . Po lemi 12.2 pa je $p_{L_l(P_l)} = |\det L_l| p_{P_l}$, torej je

$$p_{G(P_l)} < p_{L_l(P_l)} + \varepsilon p_{P_l} \leq \sup_{\vec{q} \in G^{-1}(\Omega)} |\det G'(\vec{q})| p_{P_l} + \varepsilon p_{P_l}$$

in od tod

$$\sum_l p_{G(P_l)} < (M + \varepsilon) \sum_l p_{P_l},$$

kjer smo označili $M = \sup_{\vec{q} \in G^{-1}(\Omega)} |\det G'(\vec{q})|$. Ker je vsota $\sum_l p_{P_l}$ (tj. vsota plosčin vseh delilnih kvadratov, ki sekajo rob množice $G^{-1}(\Omega)$) poljubno majhna, če je le delitev D dovolj drobna, pove gornja ocena, da velja isto za vsoto $\sum_l p_{G(P_l)}$. Ker je funkcija f omejena na Ω , sledi od tod, da lahko integral $\iint_{\Omega} f(\vec{r}) dp$ poljubno natančno aproksimiramo z vsotami oblike

$$(12.9) \quad \sum_k \iint_{G(P_k)} f(\vec{r}) dp,$$

kjer teče vsota le po vseh tistih k , za katere je pravokotnik P_k znotraj množice $G^{-1}(\Omega)$. Zaradi enakomerne zveznosti funkcije f na Ω (in ker iz majhnosti kvadratov P_k sledi, da so tudi liki $G(P_k)$ majhni (po lemi 12.3 in omejenosti funkcije $\|G'\|$ na kompaktni množici $G^{-1}(\Omega)$), lahko na $G(P_k)$ vrednosti funkcije f aproksimiramo s konstantami $f(\vec{r}_k)$, kjer je $\vec{r}_k \in G(P_k)$ poljubna točka. Če je torej $|f(\vec{r}) - f(\vec{r}_k)| < \varepsilon$ za vse $\vec{r} \in G(P_k)$ (kjer je $\varepsilon > 0$ poljuben), potem je

$$\begin{aligned} & \left| \sum_k \iint_{G(P_k)} f(\vec{r}) dp - \sum_k f(\vec{r}_k) p_{G(P_k)} \right| = \left| \sum_k \iint_{G(P_k)} (f(\vec{r}) - f(\vec{r}_k)) dp \right| \\ & \leq \sum_k \iint_{G(P_k)} |f(\vec{r}) - f(\vec{r}_k)| dp < \varepsilon \sum_k p_{G(P_k)} \leq \varepsilon p_{\Omega}. \end{aligned}$$

Ker lahko integral $\iint_{\Omega} f(\vec{r}) dp$ poljubno natančno aproksimiramo z vsotami oblike (12.9), sledi sedaj iz zadnje ocene, da ga lahko aproksimiramo z vsotami oblike

$$(12.10) \quad \sum_k f(\vec{r}_k) p_{G(P_k)} \quad (\vec{r}_k \in G(P_k)),$$

kjer teče vsota le po vseh kvadratih P_k , ki so vsebovani v notranjosti množice $G^{-1}(\Omega)$. Ploščine $p_{G(P_k)}$ lahko po lemi 12.3 dobro aproksimiramo z $|\det G'(\vec{q}_k)| p_{P_k}$, kjer izberemo $\vec{q}_k$ v središču kvadrata P_k . Postavimo $\vec{r}_k = G(\vec{q}_k)$. Tedaj lahko vsote oblike (12.10) aproksimiramo z vsotami oblike

$$(12.11) \quad \sum_k f(G(\vec{q}_k)) |\det G'(\vec{q}_k)| p_{P_k},$$

saj je razlika med (12.10) in (12.11) po absolutni vrednosti pod

$$\begin{aligned} & \sum_k |f(G(\vec{q}_k))| |p_{G(P_k)} - |\det G'(q_k)| p_{P_k}| \\ & \leq \sum_k f(G(\vec{q}_k)) \varepsilon p_{P_k} \leq \varepsilon C \sum_k p_{P_k} \leq \varepsilon C p_{G^{-1}(\Omega)}, \end{aligned}$$

kjer je $C = \sup_{\vec{q} \in G^{-1}(\Omega)} |f(G(\vec{q}))|$. Toda vsota (12.11) je le nekoliko drugače napisana vsota (12.8). S tem je dokaz končan, kadar ima Ω rob sestavljen iz končno mnogo zvezno odvedljivih krivulj in je f zvezna. Pri splošnejši predpostavki, da imata rob množice Ω in množica točk nezveznosti funkcije f mero 0, zahteva dokaz nekaj dodatnega dela; ker te splošnejše verzije izreka tukaj ne bomo uporabljali, bomo te podrobnosti dokaza izpustili. $\square$

Splošne koordinate na odprti množici V v $\mathbb{R}^3$ tvorijo tri take zvezno odvedljive funkcije u, v, w na V , da je preslikava

$$F : V \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(\vec{r}) = (u(\vec{r}), v(\vec{r}), w(\vec{r})) \quad (\vec{r} \in V)$$

injektivna in ima v vsaki točki obrnljiv odvod $F'(\vec{r})$. Tedaj preslika V bijektivno na neko odprto podmnožico U v $\mathbb{R}^3$ in inverzna preslikava $G := F^{-1} : U \rightarrow V$ je tudi zvezno odvedljiva, determinanta njenega odvoda,

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}(u, v, w) := \det G'(u, v, w),$$

je različna od 0.

Koordinatne ploskve so določene z enačbami

$$u(x, y, z) = u_0, \quad v(x, y, z) = v_0, \quad w(x, y, z) = w_0,$$

kjer so u_0, v_0 in w_0 konstante.

Linearna preslikava $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ preslika vsak paralelepiped Λ v nov paralelepiped, med njunima prostorninama pa je povezava

$$V_{L(\Lambda)} = \det L V_{\Lambda},$$

kar sledi iz dejstva, da je prostornina paralelepipeida enaka mešanemu produktu vektorjev, ki ga razpenjajo. Formula za zamenjavo spremenljivk v trojnem integralu se glasi

$$(12.12) \quad \iiint_{\Omega} f(\vec{r}) dV = \iiint_{G^{-1}(\Omega)} f(G(\vec{q})) |\det G'(\vec{q})| du dv dw,$$

kjer je f zvezna funkcija na kompaktni množici $\Omega \subseteq V$ (razen morda na podmnožici z mero 0), rob $\partial\Omega$ množice Ω pa ima mero 0 (to je npr. v primeru, ko je $\partial\Omega$ sestavljen iz končno mnogo zvezno odvedljivih ploskev). Dokaz formule (12.12) je podoben dokazu izreka 12.1. Analogna formula velja tudi za večkratne integrale.

Zgled 12.4. (i) Polarni koordinati r, φ sta definirani na množici $(0, \infty) \times [0, 2\pi)$; če hočemo za definicijsko območje odprto množico, lahko vzamemo $U = (0, \infty) \times (0, 2\pi)$. Preslikava

$$G : U \rightarrow V := \mathbb{R}^2 \setminus ([0, \infty) \times \{0\}), \quad G(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

je zvezno odvedljiva bijekcija in podaje dobro znano povezavo med polarnima in kartezičnima koordinatama. Determinanta njenega odvoda je

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{bmatrix} = r.$$

Od tod vidimo, da je formula za integriranje v polarnih koordinatah le poseben primer formule v izreku 12.1.

(ii) Podobno velja tudi za cilindrične koordinate r, φ, z , na odprti množici $U = (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$. Ustrezna preslikava $G : U \rightarrow V := \mathbb{R}^3 \setminus ([0, \infty) \times \{0\} \times \mathbb{R})$ je sedaj $G(r, \varphi, z) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$, determinanta njene Jacobijeve matrike pa

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)} = r.$$

Formula za integriranje v cilindričnih koordinatah je torej poseben primer formule (12.12).

(iii) Sferične koordinate R, θ, φ na odprti množici $U = (0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ določajo bijekcijo

$$G : U \rightarrow V := \mathbb{R}^3 \setminus ([0, \infty) \times \{0\} \times \mathbb{R}), \quad G(R, \theta, \varphi) = (R \sin \theta \cos \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \theta).$$

Determinanta njene Jacobijeve matrike je

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(R, \theta, \varphi)} &= \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial R} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial R} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial R} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & R \cos \theta \cos \varphi & -R \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & R \cos \theta \sin \varphi & R \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -R \sin \theta & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ko razvijemo to determinanto po zadnji vrstici in izračunamo ustrezni 2×2 determinanti, dobimo

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(R, \theta, \varphi)} &= \\ \cos \theta (R^2 \cos \theta \sin \theta \cos^2 \varphi + R^2 \cos \theta \sin \theta \sin^2 \varphi) + R \sin \theta (R \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + R \sin^2 \theta \sin^2 \varphi) \\ &= R^2 \cos^2 \theta \sin \theta + R^2 \sin^3 \theta = R^2 \sin \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta), \end{aligned}$$

torej

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(R, \theta, \varphi)} = R^2 \sin \theta,$$

kar se sklada z že znano formulo za integriranje v sferičnih koordinatah.

Zgled 12.5. Določimo težišče zgornje polovice eliptičnega lika

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, y \geq 0\} \quad (a > 0, b > 0).$$

Predpostavili bomo, da je gostota konstantna. Navor okrog osi x majhnega dela lika s ploščino dp v razdalji y od osi x je $dM = y dp$. (Dejansko je navor $y \rho g dp$,

vendar sta ploščinska gostota in težni pospešek konstanti, ki ne vplivata na lego težišča, zato smo ju izpustili.) Navor celotnega lika je torej

$$M = \iint_{\Omega} y \, dp.$$

Za izračun tega integrala vpeljimo novi koordinati r in φ prek zvez

$$(12.13) \quad x = ar \cos \varphi, \quad y = br \sin \varphi,$$

da bo potem lik Ω opisan kot

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

(Če bi najprej vpeljali novi koordinati $X = \frac{x}{a}$ in $Y = \frac{y}{b}$, bi se v novih koordinatah enačba elipse glasila $X^2 + Y^2 = 1$, kar je krožnica. Naj pripomnimo, da kot φ ne pomeni običajnega polarnega kota v prvotnem koordinatnem sistemu, ker smo x in y raztegnili za različna faktorja $1/a$ in $1/b$.) Ker je determinanta Jacobijeve matrike transformacije (12.13)

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \det \begin{bmatrix} a \cos \varphi & -ar \sin \varphi \\ b \sin \varphi & br \cos \varphi \end{bmatrix} = abr,$$

dobimo, da je

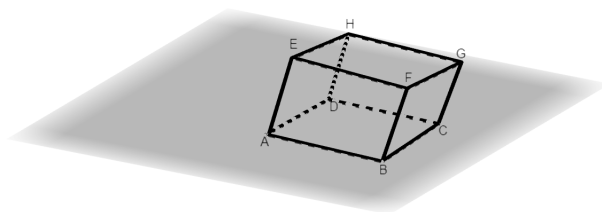
$$M = \int_0^{\pi} \int_0^1 br \sin \varphi |abr| \, dr \, d\varphi = \frac{ab^2}{3} \int_0^{\pi} \sin \varphi \, d\varphi = \frac{2}{3} ab^2.$$

Težišče je v taki točki, da bi, če bi bila celotna masa zbrana v njem, dobili enak navor, torej $py_T = M$, kjer je p ploščina lika Ω , y_T pa ordinata njegovega težišča. Ker je ploščina elipse πab , sledi $(\pi ab/2)y_T = M = (2/3)ab^2$, od koder dobimo $y_T = \frac{4}{3\pi}b$. Zaradi simetrije je očitno $x_T = 0$.

Zgled 12.6. Izračunajmo

$$\iiint_{\Omega} x \, dV,$$

kjer je Ω paralelepiped z oglišči $A(1, 1, 1)$, $B(4, 2, 1)$, $D(2, 2, 1)$, $E(1, 1, 2)$.



SLIKA 27. Paralelepiped

Nove koordinate u, v, w bomo vpeljali prek zvez

$$(12.14) \quad x = 1 + a_1 u + a_2 v + a_3 w, \quad y = 1 + b_1 u + b_2 v + b_3 w, \quad z = 1 + c_1 u + c_2 v + c_3 w,$$

kjer bomo konstante a_j, b_j in c_j določili tako, da bo paralelepipedu ustrezala kocka $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$. Oglišče $(0, 0, 0)$ te kocke preslika transformacija (12.14) v točko $(1, 1, 1)$, kar je oglišče A paralelepipeida. Oglišče $(1, 0, 0)$ kocke pa preslika v točko $(1 + a_1, 1 + b_1, 1 + c_1)$; če hočemo, da bo to ravno oglišče B paralelepipeida, mora biti

$$1 + a_1 = 4, \quad 1 + b_1 = 2, \quad 1 + c_1 = 1,$$

torej $a_1 = 3, b_1 = 1$ in $c_1 = 0$. Na enak način določimo še druge konstante $a_2, \dots, c_3$ iz zahtev, da se oglišči $(0, 1, 0)$ in $(0, 0, 1)$ kocke preslikata v oglišči D in E paralelepipeida. Tako dobimo $a_2 = 1, b_2 = 1, c_2 = 0, a_3 = 0, b_3 = 0, c_3 = 1$. Determinatna Jacobijeve matrike preslikave (12.14) je torej

$$\det \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2.$$

Po izreku 12.1 sedaj sledi

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} x \, dV &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (1 + 3u + v) 2 \, dw \, dv \, du \\ &= 2 \int_0^1 \int_0^1 (1 + 3u + v) \, dv \, du = 2 \int_0^1 (1 + 3u + \frac{1}{2}) \, du = 6. \end{aligned}$$

13. POVRŠINA PLOSKVE IN PLOSKOVNI INTEGRAL SKALARNE FUNKCIJE

Opazujemo parametrično podano ploskev

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v), \quad ((u, v) \in \Omega),$$

definirano nad ravninsko množico Ω . Ko par parametrov (u, v) opiše majhen pravokotnik s stranicama du in dv , opiše končna točka vektorja $\vec{r}(u, v)$ del ploskve. Podobno kot pri izpeljavi zamenjave spremenljivk v dvojnem integralu bomo tudi tukaj preslikavo $\vec{r}$ aproksimirali z njenim linearnim približkom: pravokotnik Λ s središčem $(u, v) \in \Omega$ in stranicama du, dv , ki naj bosta vzporedni koordinatnima osema (torej ležita na vektorjih $du(1, 0)$ in $dv(0, 1)$), se tako preslika v območje na ploskvi, ki je v prvem približku paralelogram $L(\Lambda)$, s stranicama na vektorjih $du L(1, 0)$ in $dv L(0, 1)$, kjer je L Jacobijeva matrika preslikave $\vec{r}$ v točki (u, v) , tj.

$$(13.1) \quad L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \vec{r}(u, v) & \frac{\partial}{\partial v} \vec{r}(u, v) \end{bmatrix}.$$

Njena stolpca sta torej $L(1, 0) = \frac{\partial}{\partial u} \vec{r}(u, v)$ in $L(0, 1) = \frac{\partial}{\partial v} \vec{r}(u, v)$. Ploščina paralelograma $L(\Lambda)$ je tako

$$p_{L(\Lambda)} = \|du L(1, 0) \times dv L(0, 1)\| = du \, dv \left\| \frac{\partial}{\partial u} \vec{r}(u, v) \times \frac{\partial}{\partial v} \vec{r}(u, v) \right\|.$$

Celotno površino ploskve lahko izračunamo tako, da seštejemo ploščine takih paralelogramov in limitiramo njihove velikosti proti 0, s čimer preide vsota v integral

$$(13.2) \quad p = \iint_{\Omega} \left\| \frac{\partial}{\partial u} \vec{r}(u, v) \times \frac{\partial}{\partial v} \vec{r}(u, v) \right\| du \, dv.$$

S pravkar opisanim sklepanjem seveda nismo strogo dokazali formule (13.2) za površino ploskve, saj nismo nič ocenjevali, koliko se ploščina likov $\vec{r}(\Lambda)$ razlikuje od ploščin njihovih paralelogramskih približkov (kot smo to storili pri izpeljavi formule za zamenjavo spremenljivk v dvojnem integralu). Za strogo izpeljavo bi morali najprej na kak drug način definirati površino splošne ploskve. Ker ne bomo vpeljali nobene alternativne definicije površine, bomo imeli kar *formulo (13.2) za definicijo površine ploskve*.

Z upoštevanjem Lagrangeove identitete $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{\|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$, lahko nekoliko poenostavimo formulo (13.2). Vpeljimo oznake:

$$E = \left\| \frac{\partial}{\partial u} \vec{r} \right\|^2, \quad F = \frac{\partial}{\partial u} \vec{r} \cdot \frac{\partial}{\partial v} \vec{r} \quad \text{in} \quad G = \left\| \frac{\partial}{\partial v} \vec{r} \right\|^2.$$

E , F in G so funkcije parametrov u in v . Imenujemo jih *koeficienti prve osnovne forme ploskve*. Formulo (13.2) lahko sedaj napišemo kot

$$(13.3) \quad p = \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv.$$

Označimo $\vec{q} = (u, v)$. Jacobijeva matrika $(\vec{r})'(\vec{q})$ preslikave $\vec{q} \mapsto \vec{r}(\vec{q})$ je reda 3×2 in ima stolpca $\frac{\partial}{\partial u} \vec{r}(u, v)$ ter $\frac{\partial}{\partial v} \vec{r}(u, v)$. Pri množenju matrik se vrstice prve matrike skalarno pomnožijo s stolpci druge, pri transponiranju matrike pa se zamenjajo stolpci in vrstice, zato je

$$\begin{aligned} [(\vec{r})'(\vec{q})]^T [(\vec{r})'(\vec{q})] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \vec{r}(u, v)^T \\ \frac{\partial}{\partial v} \vec{r}(u, v)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \vec{r}(u, v) & \frac{\partial}{\partial v} \vec{r}(u, v) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \vec{r}(u, v) \cdot \frac{\partial}{\partial u} \vec{r}(u, v) & \frac{\partial}{\partial u} \vec{r}(u, v) \cdot \frac{\partial}{\partial v} \vec{r}(u, v) \\ \frac{\partial}{\partial v} \vec{r}(u, v) \cdot \frac{\partial}{\partial u} \vec{r}(u, v) & \frac{\partial}{\partial v} \vec{r}(u, v) \cdot \frac{\partial}{\partial v} \vec{r}(u, v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(u, v) & F(u, v) \\ F(u, v) & G(u, v) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Od tod dobimo, ko pogledamo determinanto,

$$(13.4) \quad E(u, v)G(u, v) - F(u, v)^2 = \det[(\vec{r})'(\vec{q})]^T [(\vec{r})'(\vec{q})].$$

Če na novo parametriziramo ploskev prek zveze $\vec{q} = \vec{q}(\vec{p})$, kjer je $\vec{p} = (s, t)$ nov par parametrov, ki naj teče po ravninski množici Λ , pri čemer je preslikava $\vec{p} \mapsto \vec{q}(\vec{p})$ zvezno odvedljiva bijekcija iz Λ na Ω , s povsod obrnljivim odvodom, velja po pravilu za posredno odvajanje

$$(\vec{r}(\vec{q}(\vec{p})))' = [(\vec{r})'(\vec{q}(\vec{p}))][(\vec{q})'(\vec{p})],$$

torej je

$$[(\vec{r}(\vec{q}(\vec{p})))']^T [(\vec{r}(\vec{q}(\vec{p})))'] = [(\vec{q})'(\vec{p})]^T [(\vec{r})'(\vec{q}(\vec{p}))]^T [(\vec{r})'(\vec{q}(\vec{p}))] [(\vec{q})'(\vec{p})].$$

Ker je determinanta produkta matrik enaka produktu determinant, sledi od tod

$$\det[(\vec{r}(\vec{q}(\vec{p})))']^T [(\vec{r}(\vec{q}(\vec{p})))'] = \det([(\vec{r})'(\vec{q}(\vec{p}))]^T [(\vec{q})'(\vec{p})]) (\det[(\vec{q})'(\vec{p})])^2.$$

Iz formule (13.4) sedaj sledi, kako se izraz $EG - F^2$ spremeni pri prehodu na novo parametrizacijo ploskve:

$$E(s, t)G(s, t) - F(s, t)^2 = (E(u, v)G(u, v) - F(u, v)^2) \det[(\vec{q})'(\vec{p})]^2,$$

kjer je $(u, v) = \vec{q}(\vec{p}) = \vec{q}(s, t)$. Od tod vidimo, kako se transformira ploskovni element:

$$\sqrt{E(s, t)G(s, t) - F(s, t)^2} ds dt = \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F(u, v)^2} \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} \right| ds dt.$$

Iz formule za zamenjavo spremenljivk v dvojnem integralu tako sledi, da je

$$\begin{aligned} \iint_{\Lambda} \sqrt{E(s, t)G(s, t) - F(s, t)^2} ds dt &= \iint_{\Lambda} \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F(u, v)^2} \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} \right| ds dt \\ &= \iint_{\Omega} \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F(u, v)^2} du dv. \end{aligned}$$

Tako spoznamo:

Trditev 13.1. *Definicija površine ploskve je neodvisna od parametrizacije.*

Zgled 13.2. Na sferi s polmerom a in središčem 0 , parametrizirani v sferičnih koordinatah kot

$$\vec{r} = a(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \quad (0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi),$$

imamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{r} &= a(\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta), \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{r} &= a(-\sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, 0). \end{aligned}$$

Od tod izračunamo, da je

$$E = a^2, \quad F = 0 \quad \text{in} \quad G = a^2 \sin^2 \theta.$$

Ploščinski element je zato

$$dp = \sqrt{EG - F^2} d\theta d\varphi = a^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Za površino krogelne kapice s kotom α izračunamo

$$p = \int_0^{2\pi} \int_0^\alpha a^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 2\pi a^2 [-\cos \theta]_0^\alpha = 2\pi a^2 (1 - \cos \alpha) = 4\pi a^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Naloga. Izpeljite formulo za ploščinski element na sferi bolj neposredno, podobno kot smo izpeljali formulo za volumni element v sferičnih koordinatah.

Zgled 13.3. EksPLICITNO podano ploskev

$$z = z(x, y) \quad ((x, y) \in \Omega)$$

lahko podamo parametrično kot

$$\vec{r} = (x, y, z(x, y)) \quad ((x, y) \in \Omega),$$

kjer sta parametra kar x in y . Tukaj je

$$\frac{\partial}{\partial x} \vec{r} = (1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}), \quad \text{in} \quad \frac{\partial}{\partial y} \vec{r} = (0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}),$$

torej

$$E = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2, \quad F = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y}, \quad G = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2$$

in

$$dp = \sqrt{EG - F^2} dx dy = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

Nalogi. 1. Izračunajte površino tistega dela paraboloidea $2z = 4 - x^2 - y^2$, ki je nad krogom s središčem v 0 in polmerom $\sqrt{2}$.

2. Izračunajte ploskovni element na svitku.

Kako bi izračunali maso ploskve $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in \Omega$, če poznamo njeno ploskovno gostoto $\rho(\vec{r}(u, v)) = \frac{dm}{dp}$?

Zelo majhen del ploskve, na katerem je gostota praktično konstantna, ima maso $dm = \rho(\vec{r}(u, v)) dp = \rho(\vec{r}(u, v)) \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)} dv du$, zato je celotna masa

$$m = \iint_{\Omega} \rho(\vec{r}(u, v)) \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)} dv du,$$

kar napišemo krajše kot $m = \iint_{\mathcal{P}} \rho dp$, kjer smo s $\mathcal{P}$ označili ploskev.

Definicija 13.4. Naj bo f funkcija, dafinirana na ploskvi $\mathcal{P}$ z enačbo $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. *Ploskovni integral* te funkcije po ploskvi $\mathcal{P}$ je definiran kot

$$\iint_{\mathcal{P}} f dp = \iint_{\Omega} f(\vec{r}(u, v)) \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)} dv du.$$

Podobno kot smo dokazali neodvisnost površine od parametrizacije, bi lahko pokazali, da je ploskovni integral neodvisen od parametrizacije ploskve.

Zgled 13.5. Izračunajmo $\iint_{\mathcal{P}} z dp$, kjer je $\mathcal{P}$ tisti del paraboloidea $z = x^2 + y^2$, ki leži nad krogom $x^2 + y^2 \leq 1$.

Ker že vemo, da je ploskovni element za eksplisitno podano ploskev enak $dp = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$, imamo

$$p = \iint_{\mathcal{P}} z dp = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2} dx dy.$$

Ta integral prevedemo v polarne koordinate, da dobimo:

$$p = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\varphi = 2\pi \int_0^1 \int_0^1 r^2 \sqrt{1 + 4r^2} r dr = \pi \int_0^1 t \sqrt{1 + 4t} dt.$$

V zadnji integral vpeljemo novo spremenljivko s prek zveze $1 + 4t = s^2$. Po krajšem računu dobimo $p = \frac{\pi}{60} (25\sqrt{5} + 1)$.

14. KRIVULJNI INTEGRALI

V tem razdelku naj beseda krivulja vedno pomeni zvezno odvedljivo (ali pa vsaj odsekoma zvezno odvedljivo) krivuljo.

14.1. Krivuljni integral skalarne funkcije. Mislimo si, da je krivulja γ , podana kot

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \quad (a \leq t \leq b),$$

sestavljena iz snovi, ki ni nujno povsod enako gosta. Gostota $\rho(\vec{r}(t))$ v točki $\vec{r}(t)$ krivulje γ je definirana kot masa na enoto dolžine,

$$\rho(\vec{r}(t)) = \frac{dm}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta s}.$$

Masa zelo majhnega dela dolžine ds krivulje je tako $dm = \rho(\vec{r}(t)) ds = \rho(\vec{r}(t)) \|\dot{\vec{r}}(t)\| dt$, celotna masa pa limita vsot mas takih delov, ko gredo njihove velikosti proti 0, torej

$$m = \int_a^b \rho(\vec{r}(t)) \|\dot{\vec{r}}(t)\| dt.$$

Integral na desni strani gornje formule imenujemo krivuljni integral.

Definicija 14.1. Naj bo f (zvezna) funkcija na krivulji γ z enačbo $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $a \leq t \leq b$. Krivuljni integral funkcije f po krivulji γ , $\int_\gamma f(\vec{r}) ds$, je definiran kot

$$\int_\gamma f(\vec{r}) ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \|\dot{\vec{r}}(t)\| dt.$$

Zgled 14.2. Izračunajmo $\int_\gamma z ds$, kjer je γ en navoj vijačnice, podan kot $\vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Po definiciji imamo

$$\int_\gamma z ds = \int_0^{2\pi} bt \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} dt = \int_0^{2\pi} bt \sqrt{a^2 + b^2} dt = 2\pi^2 b \sqrt{a^2 + b^2}.$$

14.2. Krivuljni integral vektorske funkcije. Naj bo $\vec{F} = (M, N, P)$ vektorska funkcija na krivulji γ , podani kot $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $a \leq t \leq b$. Tukaj so M , N in P skalarne funkcije na krivulji γ , z realnimi vrednostmi.

Definicija 14.3. Krivuljni integral $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ je definiran kot

$$(14.1) \quad \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt.$$

Vektorsko funkcijo imenujemo tudi *vektorsko polje*. Če pomeni $\vec{F}(\vec{r}(t))$ npr. silo v točki $\vec{r}(t)$ na delec, ki se premika po krivulji, pomeni krivuljni integral $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ delo te sile po poti γ , ko se delec premika od začetne točke $\vec{r}(a)$ do končne točke $\vec{r}(b)$. Pri krivuljnem integralu je pomembno, v kateri smeri potujemo po krivulje. Možni sta dve smeri potovanja ali *orientaciji*.

Trditev 14.4. Če je $t = t(\tau)$ ($\alpha \leq \tau \leq \beta$) naraščajoča zvezno odvedljiva funkcija novega parametra τ in t preteče interval $[a, b]$, ko τ preteče interval $[\alpha, \beta]$, potem je

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d}{dt} \vec{r}(t) dt = \int_\alpha^\beta \vec{F}(\vec{r}(t(\tau))) \cdot \frac{d}{d\tau} \vec{r}(t(\tau)) d\tau,$$

kar pomeni, da je krivuljni integral enak za vse parametrizacije dane krivulje z enako orientacijo. Če pa je $t = t(\tau)$ padajoča funkcija in t preteče interval $[a, b]$, ko τ teče od β do α , potem je

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d}{dt} \vec{r}(t) dt = - \int_\alpha^\beta \vec{F}(\vec{r}(t(\tau))) \cdot \frac{d}{d\tau} \vec{r}(t(\tau)) d\tau,$$

kar pomeni, da pri spremembi orientacije krivulje, krivuljni integral spremeni predznak.

Dokaz. Dokaz sledi takoj iz formule za zamenjavo spremenljivk v določenem integralu in pravila za posredno odvajanje (namreč $\frac{d}{d\tau} \vec{r}(t(\tau)) = \frac{d}{dt} \vec{r}(t(\tau)) \frac{dt}{d\tau}(\tau)$). $\square$

Z oznakami $\vec{F} = (M, N, P)$ in $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$, lahko krivuljni integral zapišemo kot

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\gamma (M dx + N dy + P dz).$$

Zgled 14.5. Izračunajmo

$$\int_\gamma (y^2 dx + xy dy),$$

kjer je γ daljica z začetno točko $(1, 1)$ in končno točko $(2, 3)$.

To daljico lahko parametriziramo npr. kot

$$x = 1 + t, \quad y = 1 + 2t \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Ker je $dx = \dot{x} dt = dt$ in $dy = \dot{y} dt = 2dt$, je

$$\int_\gamma (y^2 dx + xy dy) = \int_0^1 [(1 + 2t)^2 + 2(1 + t)(1 + 2t)] dt = \int_0^1 (3 + 10t + 8t^2) dt = \frac{32}{3}.$$

Naloga. Izračunajte integral iz prejšnjega zgleda tako, da premico izrazite kot eksplisitno funkcijo $y = kx + n$.

Zgled 14.6. Izračunajmo $\int_\gamma (y^2 dx + x^2 dy)$, kjer je γ pozitivno usmerjena elipsa (tj. v nasprotni smeri od vrtenja urinega kazalca) z enačbo $(\frac{x}{3})^2 + (\frac{y}{2})^2 = 1$.

Parametrična enačba te elipse je

$$x = 3 \cos t, \quad y = 2 \sin t \quad (-\pi \leq t < \pi),$$

torej je $dx = -3 \sin t dt$ in $dy = 2 \cos t dt$, zato

$$\begin{aligned} \int_\gamma (y^2 dx + x^2 dy) &= \int_{-\pi}^{\pi} [(2 \sin t)^2 (-3 \sin t) + (3 \cos t)^2 (2 \cos t)] dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (-12 \sin^3 t + 18 \cos^3 t) dt = 36 \int_0^{\pi} \cos^3 t dt, \end{aligned}$$

kjer smo uporabili, da je $\sin^3$ liha, $\cos^3$ pa soda funkcija. Zadnji integral lahko izračunamo z novo spremenljivko $u = \sin t$, $du = \cos t dt$, $\cos^2 t = 1 - u^2$, da dobimo $\int (1 - u^2) du = u - \frac{u^3}{3}$ in

$$36 \int_0^{\pi} \cos^3 t dt = 36 [\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}]_0^{\pi} = 0.$$

Za dve taki krivulji γ in λ , da končna točka od γ sovpada z začetno točko od λ , lahko definiramo njuno vsoto

$$\gamma \dot{+} \lambda$$

kot krivuljo, ki poteka najprej vzdolž γ , nato pa vzdolž λ . Če označimo kot $\vec{r} = \vec{\gamma}(t)$ ($a \leq t \leq b$) in $\vec{r} = \vec{\lambda}(t)$ ($c \leq t \leq d$) njuni parametrizaciji, lahko $\gamma \dot{+} \lambda$ parametriziramo npr. kot

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} \vec{\gamma}(t), & a \leq t \leq b; \\ \vec{\lambda}(t + c - b), & b \leq t \leq b + d - c. \end{cases}$$

Opozoriti moramo, da ta operacija ni komutativna, saj $\lambda \dot{+} \gamma$ sploh ni definirana, če se začetna točka od γ ne ujema s končno točko od λ .

Nasprotna krivulja γ^- dane krivulje γ , je γ prepotovana v obratno smer. Če je γ parametrizirana kot $\vec{r} = \vec{\gamma}(t)$ ($a \leq t \leq b$), lahko γ^- parametriziramo kot

$$\vec{r} = \vec{\gamma}(-t), \quad (-b \leq t \leq -a).$$

Začetna točka od γ^- se ujema s končno točko od γ in obratno. Preprost dokaz naslednje trditve bomo pustili za nalogo.

Trditev 14.7. (i) $\int_{\gamma \dot{+} \lambda} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\lambda} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, kjer je $\vec{F}$ vektorsko polje na $\gamma \dot{+} \lambda$;

$$(ii) \int_{\gamma^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Krivuljo γ , katere končna točka se ujema z začetno, imenujemo *sklenjena*.

Trditev 14.8. Naj bo $\vec{F}$ vektorsko polje na U . Velja $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ za vsako sklenjeno krivuljo γ v U natanko tedaj, ko je $\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ za vsaki krivulji γ_1 in γ_2 v U , ki imata isto začetno in isto končno točko.

Dokaz. Predpostavimo najprej, da je $\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ za vsaki krivulji v U z isto začetno in isto končno točko, in naj bo γ poljubna sklenjena krivulja v U . Označimo s ζ konstantno krivuljo, namreč krivuljo, katere edina točka je začetna (in s tem tudi končna) točka krivulje γ . Ker imata γ in ζ isto začetno in isto končno točko, je po predpostavki $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\zeta} \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Ker pa je ζ konstantna krivulja, je $\int_{\zeta} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$.

Predpostavimo sedaj še obratno, da je $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ za vsako sklenjeno krivuljo γ v U , in bodita γ_1 in γ_2 poljubni krivulji v U , ki imata isto začetno in isto končno točko. Potem je $\gamma_1 \dot{+} \gamma_2^-$ sklenjena krivulja v U , zato $\int_{\gamma_1 \dot{+} \gamma_2^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$. S tem pa velja

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_2^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_1 \dot{+} \gamma_2^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$$

Od tod sledi $\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$. □

14.3. Krivuljni integral potencialnega polja.

Definicija 14.9. Vektorsko polje $\vec{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^2$) je *potencialno*, če obstaja taka funkcija $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^2$), imenovana *potencial polja* $\vec{F}$, da je

$$\vec{F} = \vec{\nabla}u,$$

kjer je $\vec{\nabla}u$ gradient funkcije u .

Zapisan po komponentah se ta pogoj glasi

$$M = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad N = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad P = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Za vektorsko polje $\vec{F} = (M, N) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$, kjer je U odprta podmnožica v $\mathbb{R}^2$, pa se pogoj potencialnosti glasi, da obstaja funkcija u na U , za katero velja

$$(14.2) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N.$$

Če privzamemo, da sta funkciji M in N zvezno odvedljivi, sledi iz (14.2) in enakosti mešanih odvodov reda 2

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

S tem smo dokazali:

Trditev 14.10. Zvezno odvedljivo vektorsko polje $\vec{F} = (M, N)$ je potencialno le, če velja

$$(14.3) \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Krivuljni integral potencialnega polja je lahko izračunati, če poznamo njegov potencial. Če je namreč $\vec{F} = \vec{\nabla}u$, za vsako krivuljo γ , s parametrizacijo $\vec{r} = \vec{r}(t)$ ($a \leq t \leq b$), velja

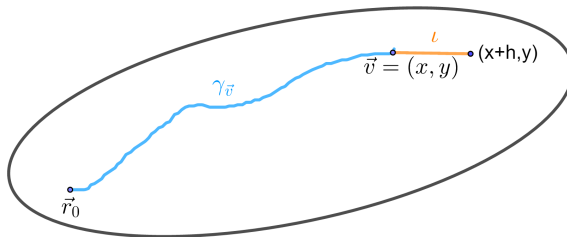
$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt = \int_a^b (\vec{\nabla}u)(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt}(u(\vec{r}(t))) dt,$$

kjer smo v zadnji enakosti uporabili pravilo za posredno odvajanje. Zadnji integral je seveda enak $u(\vec{r}(t))|_a^b$. Tako smo dokazali:

Trditev 14.11. Krivuljni integral potencialnega vektorskega polja $\vec{\nabla}u$ po katerikoli krivulji γ v definicijskem območju polja je

$$(14.4) \quad \int_{\gamma} \vec{\nabla}u \cdot d\vec{r} = u(\vec{r}(b)) - u(\vec{r}(a)),$$

kjer sta $\vec{r}(a)$ in $\vec{r}(b)$ začetna in končna točka krivulje γ . Torej je krivuljni integral danega potencialnega polja neodvisen od poteka krivulje, odvisen je le od njene začetne in končne točke.



SLIKA 28. K dokazu izreka 14.12

Odslej naj $\vec{F}$ pomeni zvezno odvedljivo vektorsko polje na kaki odprti podmnožici U v $\mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$).

Pokazali bomo, da je lastnost, navedena v zadnjem stavku prejšnje trditve, značilna za potencialna polja. Pri tem se smemo omejiti na polja, definirana na *območjih*, tj. odprtih povezanih množicah. Naj spomnimo, da je odprta množica U v $\mathbb{R}^n$ povezana, če je mnogoče katerikoli njeni dve točki povezati s potjo, ki leži v celoti v U . (To pomeni, da je U iz enega samega kosa.) Splošna odprta množica v $\mathbb{R}^n$ je unija območij.

Izrek 14.12. *Vektorsko polje $\vec{F}$ na območju U je potencialno natanko tedaj, ko je za vsaki dve točki $\vec{r}_0$ in $\vec{r}$ iz U krivuljni integral $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ enak za vse krivulje γ v U z začetno točko $\vec{r}_0$ in končno točko $\vec{r}$.*

Dokaz. Da je krivuljni integral potencialnega polja enak za vse krivulje, ki imajo isto začetno in isto končno točko, pove trditev 14.4. Za dokaz v obratno smer pa fiksirajmo poljubno točko $\vec{r}_0 \in U$ in definirajmo funkcijo u na U takole: Za poljubno točko $\vec{v} \in U$ izberimo poljubno krivuljo $\gamma_{\vec{v}}$ v U z začetkom $\vec{r}_0$ in koncem $\vec{v}$ in postavimo

$$(14.5) \quad u(\vec{v}) = \int_{\gamma_{\vec{v}}} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Definicija je nedvoumna, saj je po predpostavki krivuljni integral enak za vse krivulje, ki se začnejo v $\vec{r}_0$ in končajo v $\vec{v}$. Pokazali bomo, da je $\vec{\nabla}u = \vec{F}$, torej $\frac{\partial u}{\partial x} = M$, $\frac{\partial u}{\partial y} = N$, itd., kjer so $M, N, \dots$ komponente polja $\vec{F}$. Pravzaprav zadošča dokazati le enakost

$$(14.6) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\vec{v}) = M(\vec{v}),$$

saj je dokaz za druge spremenljivke $y, z, \dots$ enak. Zaradi krajšega zapisa, se bomo omejili na primer, ko je U podmnožica ravnine, torej ima $\vec{v}$ le dve komponenti, $\vec{v} = (x, y)$. Tedaj je

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\int_{\lambda} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} \right],$$

kjer je γ krivulja v U z začetkom $\vec{r}_0$ in koncem $\vec{v} = (x, y)$, λ pa krivulja v U z začetkom $\vec{r}_0$ in koncem $(x+h, y)$. Za λ lahko izberemo kar $\gamma + \iota$, kjer je ι daljica z začetkom (x, y) in koncem $(x+h, y)$. Tedaj lahko gornji izraz za $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)$ poenostavimo v

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\iota} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Ker se parametrizacija daljice ι glasi $\vec{r} = (x+t, y)$ ($0 \leq t \leq h$), torej je $d\vec{r} = (dt, 0)$, imamo od tod

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h M(x+t, y) dt = M(x, y),$$

kar je ravno enakost (14.6). (Zadnja enakost je posledica osnovnega izreka integralnega računa, saj je limita $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h M(x+t, y) dt$ ravno odvod integrala $\int_0^h f(t) dt$ na zgornjo mejo h , kjer je $f(t) := M(x+t, y)$.) $\square$

Iz izreka 14.12 in trditve 14.8 takoj sledi naslednji kriterij za potencialnost polja:

Posledica 14.13. *Vektorsko polje $\vec{F}$ na U je potencialno natanko tedaj, ko je*

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

za vsako sklenjeno krivuljo γ v U .

S pomočjo posledice 14.13 lahko pokažemo, da pogoj v trditvi 14.10 ni vedno zadosten za potencialnost polja.

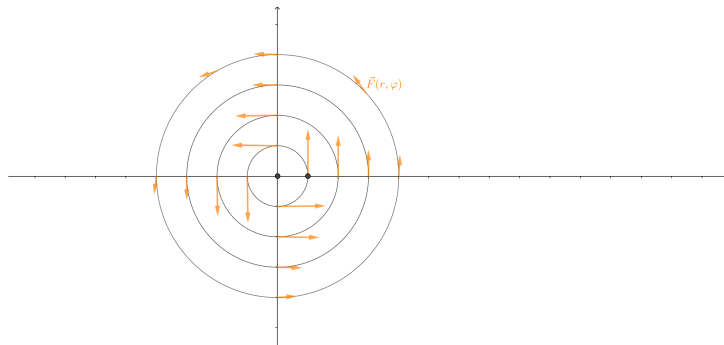
Zgled 14.14. Oglejmo si vektorsko polje

$$\vec{F}: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{F}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Nazorneje se ga da izraziti v polarnih koordinatah:

$$\vec{F}(r, \varphi) = \frac{1}{r} (-\sin \varphi, \cos \varphi),$$

od koder vidimo, da je njegova velikost $\|\vec{F}(r, \varphi)\| = \frac{1}{r}$, torej enaka v vseh točkah na krožnici s polmerom r in središčem 0; smer pa tangenta na take krožnice in



SLIKA 29. Vektorsko polje $\vec{F}(r, \varphi) = \frac{1}{r}(-\sin \varphi, \cos \varphi)$

sicer nasprotna vrtenju urinega kazalca. (Tako polje spominja na magnetno polje ravnega električnega vodnika.)

Tukaj je $M = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $N = \frac{x}{x^2+y^2}$, torej

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Kljub temu pa to polje ni potencialno, saj je njegov integral po pozitivno usmerjeni krožnici $x^2 + y^2 = a^2$ enak

$$\int_{x^2+y^2=a^2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a}(-\sin \varphi, \cos \varphi) \cdot (a \cos \varphi, a \sin \varphi)' d\varphi = 2\pi \neq 0.$$

15. POVEZAVA MED KRIVULJNIM IN DVOJNIM INTEGRALOM

V tem razdelku naj bo $\vec{F} = (M, N)$ zvezno odvedljivo vektorsko polje na območju $U \subseteq \mathbb{R}^2$.

Opazujmo najprej sklenjeno krivuljo γ v U , ki je sestavljena iz grafov dveh zveznih funkcij $g_1, g_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, kjer je $g_1 \leq g_2$. Ta krivulja je, morda skupaj z dvema navpičnima daljicama, rob množice

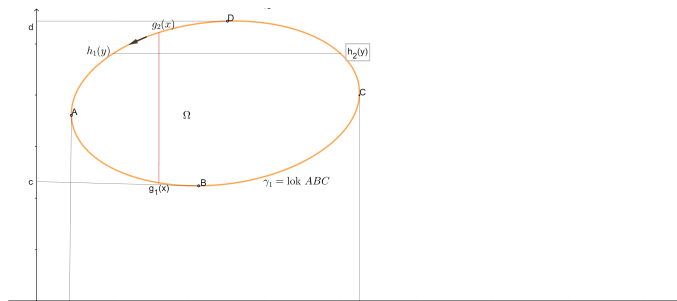
$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g_1(x) \leq y \leq g_2(x), a \leq x \leq b\}.$$

Krivuljo γ usmerimo tako, da je množica Ω na njeni levi. Krivuljni integral

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} (M dx + N dy) = \int_{\gamma} M dx + \int_{\gamma} N dy$$

bomo obravnavali v dveh korakih. Najprej $\int_{\gamma} M dx$. Ker je na (morebitnih) navpičnih daljicah $dx = 0$, zadošča integrirati po spodnjem delu krivulje γ_1 , ki je graf funkcije g_1 in ga lahko parametriziramo kar kot $y = g_1(x)$ ($a \leq x \leq b$), ter po zgornjem delu γ_2 , ki je graf funkcije $y = g_2(x)$ ($a \leq x \leq b$), pri čemer na zgornjem robu x teče od b proti a . Tako imamo sedaj

$$\int_{\gamma} M dx = \int_{\gamma_1} M dx + \int_{\gamma_2} M dx = \int_a^b M(x, g_1(x)) dx - \int_a^b M(x, g_2(x)) dx$$



SLIKA 30. K dokazu Greenove formule

$$= - \int_a^b (M(x, g_2(x)) - M(x, g_1(x))) dx.$$

Ker je $M(x, g_2(x)) - M(x, g_1(x)) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) dy$, sledi, da je

$$\int_{\gamma} M dx = - \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) dy \right) dx.$$

Toda zadnji dvakratni integral je enak dvojnemu integralu po Ω , s čimer smo pokazali, da je

$$(15.1) \quad \int_{\gamma} M dx = - \iint_{\Omega} \frac{\partial M}{\partial y} dp.$$

Podobno lahko pokažemo, da je

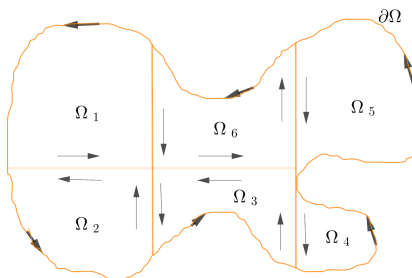
$$(15.2) \quad \int_{\gamma} N dy = \iint_{\Omega} \frac{\partial N}{\partial x} dp,$$

če privzamemo, da se rob množice Ω da paramterizirati kot unija grafov dveh zveznih funkcij, $x = h_1(y)$ in $x = h_2(y)$ ($c \leq y \leq d$). Pri tem mora biti $h_1 \leq h_2$ in rob spet usmerjen tako, da je Ω na njegovi levi. Ko seštejemo (15.1) in (15.2), dobimo

$$(15.3) \quad \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} (M dx + N dy) = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dp.$$

To je *Greenova formula*, ki velja npr. za vse pravokotnike.

Velja pa tudi za splošnejše ravninske množice, katerih rob sestoji iz končno mnogo zvezno odvedljivih krivulj. Za splošno množico jo lahko dokažemo tako, da množico ω razrežemo na manjše podmnožice Ω_j take vrste, kot smo jih obravnavali zgoraj. To lahko storimo z mrežo vzporednic koordinatnima osema, ki razdeli ravnino na pravokotnike. V poštev pridejo tisti pravokotniki, ki so vsebovani v notranjosti množice Ω , in tisti, ki sekajo rob množice Ω . Ker se vsako zvezno odvedljivo krivuljo da po delih parametrizirati v eni od oblik $y = y(x)$, $x = x(y)$, sledi, da so vsi ti deli take oblike, kot smo jo obravnavali v prejšnjem odstavku. Ko seštejemo dvojne integrale po teh delih Ω_j , dobimo dvojni integral po Ω . Ko pa seštejemo krivuljne integrale po vseh robovih teh delov, nastopa vsak rob znotraj Ω dvakrat



SLIKA 31. Razrez množice Ω na enostavnejše dele Ω_j ; integrali po delih robov znotraj Ω se uničijo.

in sicer z nasprotno usmerjenostjo, zato se ustrezna integrala uničita. Ostane le vsota integralov po tistih delih robov, ki so del roba množice Ω , le ti pa se seštejejo v integral po $\partial\Omega$. Tako smo dokazali *Greenov izrek*:

Izrek 15.1. *Naj bo Ω kompaktna ravninska množica, katere rob $\partial\Omega$ sestoji iz končno mnogo sklenjenih zvezno odvedljivih krivulj, parametriziranih na kompaktnih intervalih in usmerjenih tako, da je Ω na njihovi levi. Za vsako zvezno odvedljivo vektorsko polje $\vec{F} = (M, N)$, definirano na neki okolici množice Ω , velja Greenova formula*

$$\int_{\partial\Omega} (M dx + N dy) = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dp.$$

Ravninsko območje U brez lukenj imenujemo *enostavno povezano*. Natančneje: U je enostavno povezano, če je njegov komplement v razširjeni ravnini (tj. v $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$) povezana množica (se pravi iz enega kosa). Npr. pas $0 < y < 1$ je enostavno povezan. Njegov komplement v ravnini $\mathbb{R}^2$ sicer ni povezan, saj je sestavljen iz dveh ločenih delov $y \leq 0$ in $y \geq 1$. Toda v razširjeni ravnini se oba dela stikata v točki ∞ , zato je komplement od U v razširjeni ravnini povezan.

Posledica 15.2. *Na enostavno povezanem območju U je pogoj $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ (potreben in) zadosten za potencialnost vektorskega polja $\vec{F} = (M, N)$.*

Dokaz. Da je pogoj potreben, vemo že iz prejšnjega razdelka. Da je na enostavno povezanih območjih tudi zadosten, pa bomo pokazali s pomočjo posledice 14.13 in Greenove formule. Pokazati zadošča, da je $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ za vsako sklenjeno krivuljo γ v U . Krivulja γ je rob neke kompaktne množice Ω v U (ki je lahko sestavljena iz več delov) in po Greenovi formuli imamo $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy = 0$. $\square$

Naloga. Izračunajte $\int_{\gamma} \left(-\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy \right)$, kjer je γ poljubna sklenjena krivulja v ravnini, ki ne gre skozi 0. (Navodilo: rezultat je odvisen od tega, kolikokrat

in v kateri smeri krivulja γ obkroži točko 0. Če npr. γ le enkrat obkroži točko 0, uporabite Greenovo formulo za množico Ω med γ in (dovolj majhnim) krogom okrog 0.)

16. PRETOK VEKTORSKEGA POLJA

Naj bo $\vec{F}$ vektorsko polje na ploskvi $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3$, parametrizirani kot

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v), \quad (u, v) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2,$$

kjer je $\vec{r}$ zvezno odvedljiva funkcija parametrov u in v . Privzeli bomo tudi, da ima ploskev dve strani (Möbiusov trak, ki smo ga že srečali, jih nima), tako da lahko na njej izberemo *enotsko normalno vektorsko polje*, tj. v vsaki točki enotski vektor $\vec{n}(u, v)$, pravokoten na ploskev, pri čemer je funkcija $(u, v) \mapsto \vec{n}(u, v)$ zvezna. Kot že vemo, ga lahko izračunamo kot

$$(16.1) \quad \vec{n}(u, v) = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u, v)}{\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u, v) \right\|},$$

kadar je vektor $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u, v)$ različen od $\vec{0}$. Tako ploskev bomo imenovali *orientabilna*.

Definicija 16.1. *Integral vektorskega polja $\vec{F}$ po orientabilni ploskvi $\mathcal{P}$, opremljeni z enotskim normalnim vektorskim poljem $\vec{n}$, je definiran kot integral funkcije $\vec{F} \cdot \vec{n}$ po $\mathcal{P}$, torej kot*

$$(16.2) \quad \iint_{\mathcal{P}} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dp = \iint_{\Omega} \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u, v) \right\| du \, dv.$$

Opazimo, da ta integral spremeni predznak, če zamenjamo orientacijo ploskve, kar pomeni, da $\vec{n}$ zamenjamo z $-\vec{n}$. Ko vstavimo v formulo (16.2) izraz (16.1) za $\vec{n}(u, v)$ in pokrajšamo, dobimo

$$\iint_{\mathcal{P}} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dp = \iint_{\Omega} (\vec{F}(\vec{r}(u, v)), \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u, v)), du \, dv,$$

kjer smo z $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ označili mešani produkt vektorjev.

Oglejmo si pomen tega ploskovnega integrala. Naj bo $\vec{F}$ vektorsko polje hitrosti $\vec{v}$ kake tekočine, ki teče skozi paralelogram s ploščino dp , a ne nujno pravokotno na ravnino, v kateri leži paralelogram. V času dt preteče skozi to ploskev tekočina, ki tvori prizmo s stranico $\vec{v} \, dt$ in višino $\pm(\vec{v} \, dt) \cdot \vec{n}$, kjer je $\vec{n}$ enotski normalni vektor na ravnino paralelograma. Prostornina te prizme je torej $dp |\vec{v} \cdot \vec{n}| dt$. Toliko tekočine steče torej skozi paralelogram v času dt . *Pretok* (se pravi prostornina tekočine, ki steče skozi ploskev v časovni enoti) je potem

$$\vec{v} \cdot \vec{n} \, dp,$$

kjer morebitni negativni rezultat pomeni, da tekočina teče v drugo stran prostora, kot pa kaže normala. Pretok polja $\vec{v}$ skozi splošno orientabilno ploskev $\mathcal{P}$ dobimo tako, da ploskev razdelimo na zelo majhne dele, seštejemo pretoke skozi te dele in limitiramo velikosti delov proti 0, s čimer dobimo, da je pretok enak $\iint_{\mathcal{P}} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dp$.

Zgled 16.2. Naj bo $\vec{F}(\vec{r}) = e \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}$, kjer je e konstanta. (Tako je električno polje električnega naboja, nameščenega v koordinatno izhodišče.) Izračunajmo pretok tega polja skozi sfero s središčem v 0 in polmerom a , kjer naj normalno polje $\vec{n}$ kaže navzven, torej $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{a}$.

Ker je na sferi $\mathcal{P}$ norma krajevnih vektorjev $\vec{r}$ vseh točk enaka a , je $\vec{F} \cdot \vec{n} = e \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}}{a^4} = \frac{e}{a^2}$, zato

$$\iint_{\mathcal{P}} \vec{F} \cdot \vec{n} dp = \frac{e}{a^2} \iint_{\mathcal{P}} dp = \frac{e}{a^2} 4\pi a^2 = 4\pi e.$$

16.1. Povezava med krivuljnim in ploskovnim integralom. Na podlagi veljavnosti Greenove formule, ki smo jo spoznali v prejšnjem razdelku, lahko domnevamo, da mora obstajati povezava med ploskovnim integralom vektorskega polja in krivuljnim integralom nekega drugega vektorskega polja po robu orientabilne ploskve.

Za začetek predpostavimo, da je kompaktna ploskev $\mathcal{P}$ podana eksplicitno kot

$$z = z(x, y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

kjer je z zvezno odvedljiva funkcija na kompaktni množici $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ z odsekoma zvezno odvedljivim robom $\partial\Omega$, usmerjenim tako, da je Ω na njegovi levi. Krajevni vektor do splošne točke na tej ploskvi je $\vec{r} = (x, y, z(x, y))$, enotska normala pa

$$\vec{n} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}}{\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \right\|} = \frac{(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1)}{\sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2}}.$$

Kot smo že izračunali v enem prejšnjih razdelkov, je ploskovni element na taki ploskvi $dp = \sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2} dx dy$, torej je

$$(16.3) \quad \vec{n} dp = (-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1) dx dy.$$

Ker je $\partial\mathcal{P}$ del ploskve $\mathcal{P}$ nad robom $\partial\Omega$ ravninske množice Ω , lahko krajevni vektor vsake točke na $\partial\mathcal{P}$ izrazimo kot $(x, y, z(x, y))$, kjer je $(x, y) \in \partial\Omega$. Krivuljni integral vektorskega polja oblike $\vec{F} = (M, N, P)$ po $\partial\mathcal{P}$ pa lahko izrazimo kot (kjer bomo uporabili, da je na ploskvi $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$)

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{P}} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{\partial\Omega} (M(x, y, z(x, y)) dx + N(x, y, z(x, y)) dy + P(x, y, z(x, y)) dz) \\ &= \int_{\partial\Omega} \left((M + P \frac{\partial z}{\partial x}) dx + (N + P \frac{\partial z}{\partial y}) dy \right). \end{aligned}$$

Zadnji integral lahko preoblikujemo po Greenovi formuli, da dobimo

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{P}} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \\ \iint_{\Omega} \left(\frac{d}{dx} (N + P \frac{\partial z}{\partial y}) - \frac{d}{dy} (M + P \frac{\partial z}{\partial x}) \right) dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + P \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} - P \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right] dx dy. \\
(16.4) \quad &= \iint_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial N}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \frac{\partial z}{\partial x} + \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z} \right) \frac{\partial z}{\partial y} \right) dx dy.
\end{aligned}$$

Enak rezultat bomo dobili, ko bomo interirali po $\mathcal{P}$ vektorsko polje

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}, \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right).$$

Z uporabo enakosti (16.3) imamo namreč

$$\begin{aligned}
&\iint_{\mathcal{P}} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}, \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \cdot \vec{n} dp \\
&= \iint_{\Omega} \left(- \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) \frac{\partial z}{\partial x} - \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) \frac{\partial z}{\partial y} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \right) dx dy,
\end{aligned}$$

kar je le nekoliko drugače napisan izraz (16.4). S tem smo pokazali, da velja enakost

$$(16.5) \quad \int_{\partial \mathcal{P}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{\mathcal{P}} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dp,$$

kjer smo označili

$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}, \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) = \vec{\nabla} \times \vec{F}.$$

Pri tem mora biti rob tako usmerjen (podobno kot v Greenovi formuli), da je ploskev na njegovi levi, ko jo gledamo iz strani normale.

Vsako kompaktno ploskev lahko razrežemo na končno mnogo delov, ki so podani eksplicitno (v eni od oblik $z = z(x, y)$, $y = y(x, z)$, $x = x(y, z)$). Ploskovni integrali po delih se seštejejo v ploskovni integral po celotni ploskvi $\mathcal{P}$, krivuljni integrali po tistih delih robov delnih ploskev, ki so vsebovani znotraj $\mathcal{P}$ se uničijo, ker vsak tak rob nastopa dvakrat in sicer z nasprotno usmerjenostjo (podobno kot v dokazu Greenove formule), krivuljni integrali po preostalih robovih pa se seštejejo v krivuljni integral po $\partial \mathcal{P}$. Zato velja naslednji Stokesov izrek:

Izrek 16.3. *Naj bo $\mathcal{P}$ kompaktna orientabilna ploskev v $\mathbb{R}^3$ z enotskim normalnim vektorskim poljem $\vec{n}$ in odsekoma zvezno odvedljivim robom $\partial \mathcal{P}$, usmerjenim tako, da je ploskev $\mathcal{P}$ na njegovi levi, ko gledamo s strani, v katero kaže $\vec{n}$. Za vsako zvezno odvedljivo vektorsko polje $\vec{F}$ potem velja*

$$\int_{\partial \mathcal{P}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{\mathcal{P}} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dp.$$

Opomba 16.4. V gornjem dokazu smo ravnali tako, kot da bi bila ploskev dvakrat zvezno odvedljiva, saj smo uporabljali $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$. Temu se je mogoče izogniti z nekoliko drugačnim dokazom.

Najprej opazimo, da se v primeru, ko je ploskev $\mathcal{P}$ del ravnine, Stokesov izrek reducira na Greenovo formulo. Tedaj namreč koordinatni sistem izberemo tako,

da je ta ravnina kar x, y , njen enotski normalni vektor torej $\vec{n} = (0, 0, 1)$. Izraz $\text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dp$ se zato glasi $(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}) dx dy$ (kjer je $\vec{F} = (M, N, P)$). Ker je tedaj tudi $\partial \mathcal{P}$ del ravnine x, y , je $d\vec{r} = (dx, dy, 0)$ in $\vec{F} \cdot d\vec{r} = M dx + N dy$. S tem se formula v Stokesovem izreku reducira na Greenovo formulo.

Splošno ploskev $\mathcal{P}$ lahko sedaj razrežemo na dele, ki so skoraj ravni (tj. skoraj ležijo v njihovih tangentnih ravninah), na vsakem delu uporabimo Greenovo formulo in seštejemo po vseh delih, ter limitiramo velikost delov proti 0. Kot že prej pri taki delitvi, se krivuljni integrali po robovih znotraj ploskve uničijo in kot rezultat dobimo Stokesovo formulo. Seveda bi bilo treba pri takem dokazu oceniti napake, ki jih napravimo, ko dele ploskve aproksimiramo z ravninskimi deli, in se prepričati, da ne pokvari dokaza. To bi bilo podobno kot pri dokazovanju formule za vpeljavo novih spremenljivk v dvojni integral, vendar precej zamudno.

Posledica 16.5. *Vektorsko polje $\vec{F}$ na $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ (ali pa na kaki konveksni odprti množici v $\mathbb{R}^3$) je potencialno natanko tedaj, ko je $\text{rot } \vec{F} \equiv \vec{0}$.*

Nalogi. 1. Dokazite gornjo posledico. Navedite tudi kak zgled odprte podmnožice v $\mathbb{R}^3$ in vektorskega polja $\vec{F}$ na njej, ki ni potencialno, kljub temu, da je $\text{rot } \vec{F} \equiv \vec{0}$.

2. Pokazite, da je pretok vektorskega polja $\text{rot } \vec{F}$ skozi zgornjo in spodnjo poloblo enak (kjer na celotni sferi izberemo enotsko normalno vektorsko polje, ki kaže navzven).

Izberimo za ploskev $\mathcal{P}$ krog D_ε s polmerom ε , ki leži v ravnini, katere normala ima isto smer kot $\text{rot } \vec{F}(\vec{r}_0)$ za kako točko $\vec{r}_0$. Če je polmer kroga zelo majhen, je na njem $\text{rot } \vec{F}$ približno enak $\text{rot } \vec{F}(\vec{r}_0)$ (saj smo privzeli, da je polje $\vec{F}$ zvezno odvedljivo, torej $\text{rot } \vec{F}$ zvezna vektorska funkcija). Zato je integral $\iint_{D_\varepsilon} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dp$ približno enak $\text{rot } \vec{F}(\vec{r}_0) \cdot \vec{n} p(D_\varepsilon)$, kjer je $p(D_\varepsilon) = \pi \varepsilon^2$. Ker ima $\vec{n}$ enako smer kot $\text{rot } \vec{F}(\vec{r}_0)$, sledi od tod

$$\|\text{rot } \vec{F}\| \approx \frac{\int_{\partial D_\varepsilon} \vec{F} \cdot d\vec{r}}{p(D_\varepsilon)}.$$

Približek je tem boljši, čim manjši je ε , v limiti pa dobimo točen rezultat:

$$(16.6) \quad \|\text{rot } \vec{F}(\vec{r}_0)\| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{\partial D_\varepsilon} \vec{F} \cdot d\vec{r}}{p(D_\varepsilon)}.$$

Če ima vektorsko polje na ∂D_ε radialno smer, je integral v števcu formule (16.6) enak 0, saj ima $d\vec{r} = \dot{\vec{r}} dt$ smer tangente na krožnico ∂D_ε in je zato $\vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$. Integral v števcu bo temvečji (pri dani jakosti polja $\vec{F}$), čimbolj tangencialno in v isti smeri obhoda kroga bo kazalo polje $\vec{F}$, kar nakazuje na vrtnčenje. (Mislimo si npr., da je $\vec{F}$ polje hitrosti tekočine.) Rotor je zato merilo za vrtnčenje polja. Vektorsko polje $\vec{F}$, za katero je $\text{rot } \vec{F} \equiv \vec{0}$, imenujemo *polje brez vrtnceve*.

16.2. Povezava med trojnim in ploskovnim integralom. Naj bo T kompaktna množica v $\mathbb{R}^3$, katere rob ∂T naj sestoji iz končno mnogo zvezno odvedljivih ploskev, parametriziranih na kompaktnih podmnožicah v $\mathbb{R}^2$. Naj bo $\vec{F}$ zvezno odvedljivo vektorsko polje na kaki okolici telesa T . Zanima nas, ali je mogoče, po

analogiji z Greenovo formulo, izraziti pretok vektorskega polja skozi ∂T s pomočjo trojnega integrala kake funkcije po T . Pri tem bomo na ∂T izbrali tisto enotsko normalno vektorsko polje, ki kaže ven iz telesa T .

Obravnavajmo najprej poseben primer, ko je telo omejeno z dvema eksplicitno podanima ploskvama: $\mathcal{P}_1$ z enačbo $z = g_1(x, y)$ in $\mathcal{P}_2$ z enačbo $z = g_2(x, y)$, definiranimi nad ravninsko množico $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, pri čemer naj bo $g_1(x, y) \leq g_2(x, y)$ za vsak $(x, y) \in \Omega$. Če se ti dve ploskvi ne stikata, je sestavni del roba seveda tudi del plašča $\mathcal{P}$ navpičnega valja med njima, nad $\partial\Omega$. Vektorsko polje pa naj bo oblike $\vec{P} = (0, 0, P(x, y, z))$. Tedaj je

$$\iint_{\partial T} \vec{P} \cdot \vec{n} dp = \iint_{\mathcal{P}_1} \vec{P} \cdot \vec{n} dp + \iint_{\mathcal{P}_2} \vec{P} \cdot \vec{n} dp + \iint_{\mathcal{P}} \vec{P} \cdot \vec{n} dp.$$

Na navpičnem plašču valja ima normala $\vec{n}$ tretjo komponento vseskozi enako 0. Ker ima $\vec{P}$ različno od 0 le tretjo komponento, je $\vec{P} \cdot \vec{n} = 0$ in zato $\iint_{\mathcal{P}} \vec{P} \cdot \vec{n} dp = 0$. Na eksplicitno podani spodnji ploskvi $\mathcal{P}_1$ je enotsko normalno polje (normalno polje na eksplicitno podani ploskvi smo izračunali že v enem prejšnjih razdelkov)

$$\vec{n}(x, y) = \frac{(\frac{\partial g_1}{\partial x}, \frac{\partial g_1}{\partial y}, -1)}{\sqrt{(\frac{\partial g_1}{\partial x})^2 + (\frac{\partial g_1}{\partial y})^2 + 1}},$$

kjer smo upoštevali, da mora normala kazati ven iz telesa, torej imeti negativno komponento v smeri osi z . Zato je na spodnji ploskvi $\vec{n} dp = (\frac{\partial g_1}{\partial x}, \frac{\partial g_1}{\partial y}, -1) dx dy$ in s tem

$$\iint_{\mathcal{P}_1} \vec{P} \cdot \vec{n} dp = - \iint_{\Omega} P(x, y, g_1(x, y)) dx dy.$$

Podobno dobimo, da je na zgornji ploskvi

$$\iint_{\mathcal{P}_2} \vec{P} \cdot \vec{n} dp = \iint_{\Omega} P(x, y, g_2(x, y)) dx dy,$$

torej

$$\begin{aligned} \iint_{\partial T} \vec{P} \cdot \vec{n} dp &= \iint_{\Omega} (P(x, y, g_2(x, y)) - P(x, y, g_1(x, y))) dx dy \\ &= \iint_{\Omega} \left(\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z) dz \right) dx dy = \iiint_T \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z) dV. \end{aligned}$$

S tem smo pokazali enakost

$$\iint_{\partial T} \vec{P} \cdot \vec{n} dp = \iiint_T \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z) dV.$$

Podobno dokažemo tudi enakost

$$\iint_{\partial T} \vec{N} \cdot \vec{n} dp = \iiint_T \frac{\partial N}{\partial y}(x, y, z) dV$$

za vektorska polja oblike $\vec{N} = (0, N, 0)$, kadar je rob ∂T podan kot unija dveh ploskev, eksplicitno podanih v obliki $y = y(x, z)$, ter enakost

$$\iint_{\partial T} \vec{M} \cdot \vec{n} dp = \iiint_T \frac{\partial M}{\partial x}(x, y, z) dV$$

za vektorska polja oblike $\vec{M} = (M, 0, 0)$, kadar je ∂T unija dveh ploskev oblike $x = x(x, y)$ (in morebiti plašča valja med njima). Ko seštejemo vse tri zadnje izpostavljene enakosti, dobimo

$$(16.7) \quad \iint_{\partial T} \vec{F} \cdot \vec{n} dp = \iiint_T \operatorname{div} \vec{F} dV$$

za vsako vektorsko polje $\vec{F} = (M, N, P)$, kjer smo označili

$$(16.8) \quad \operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} =: \vec{\nabla} \cdot \vec{F},$$

divergenco polja $\vec{F}$. Za splošno kompaktno telo lahko formulo (16.7) sedaj dokažemo tako, da ga razrežemo na dele, z ravninami, vzporednimi koordinatnim ravninam, na katerih lahko formulo uporabimo. Trojni integrali po vseh delih se seštejejo v trojni integral po celotnem telesu T , ploskovni integrali po tistih delih robov delov, ki so znotraj T , se izničijo, ker vsaka taka robna ploskev nastopa dvakrat in sicer z nasprotno usmerjenima normalnima poljema. Ploskovni integrali po preostalih robovih pa se seštejejo v integral po ∂T . S tem smo dokazali naslednji Gaussov izrek:

Izrek 16.6. *Naj bo kompaktno telo v $\mathbb{R}^3$ omejeno s končno mnogo zvezno odvedljivimi kompaktnimi ploskvami, na katerih naj normalno vektorsko polje povsod kaže ven iz telesa T . Za vsako zvezno odvedljivo vektorsko polje $\vec{F}$ na okolici telesa T velja formula (16.7).*

Kaje pomeni divergenca? Podobno kot smo dokazali zgoraj za rotor, lahko dokažemo naslednjo trditev:

Trditev 16.7.

$$(16.9) \quad \operatorname{div} \vec{F}(\vec{r}_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\iint_{\partial K_\varepsilon} \vec{F} \cdot \vec{n} dp}{V(\varepsilon)},$$

kjer je K_ε krogla s središčem $\vec{r}_0$ in polmerom ε , $V(\varepsilon)$ njena prostornina, enotsko normalno polje na njenem robu ∂K_ε pa je usmerjeno iz krogle.

Integral v števcu formule (16.9) bo (pri dani jakosti polja $\vec{F}$) tem večji, čim bolj se bo smer polja v vsaki točki $\vec{r}$ sfere ∂K_ε ujemala s smerjo normalnega vektorja $\vec{n}(\vec{r})$, tj. s smerjo vektorja $\vec{r} - \vec{r}_0$, ki kaže iz središča krogle navzven. Če je $\operatorname{div} \vec{F}(\vec{r}_0) \neq 0$, mora biti integral v števcu različen od 0 za vsak, še tako majhen $\varepsilon > 0$, kar pove, da mora biti v točki $\vec{r}_0$ izvir polja. (Mislmo si, da je $\vec{F}$ npr. polje hitrosti tekočine.) Zato imenujemo polje $\vec{F}$, za katero je $\operatorname{div} \vec{F} \equiv 0$, *polje brez izvirov*.

Zgled 16.8. Izračunajmo pretok polja $\vec{E} = \frac{e}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r}$, kjer je e konstanta (električni naboj, nameščen v koordinatnem izhodišču), skozi poljubno sklenjeno ploskev $\mathcal{P}$, ki enkrat obkroži točko 0 (npr. elipsoid ali pa kvader).

Naj bo S_a majhna sfera s polmerom a in središčem 0, vsebovana v notranjosti telesa, katerega rob je $\mathcal{P}$. Naj bo T telo med S_a in $\mathcal{P}$, torej je $\partial T = \mathcal{P} \cup S_a^-$, kjer na $\mathcal{P}$ izberemo normalno vektorsko polje, ki kaže navzven, na S_a pa tudi navzven iz krogle (torej radialno stran od izhodišča). Znak $-$ nad S_a označuje, da je normalno

polje, ki ga bomo morali vzeti, da bo kazalo ven iz telesa T , ravno nasprotno. Po Gaussovem izreku za T velja

$$\iint_{\mathcal{P}} \vec{E} \cdot \vec{n} dp - \iint_{S_a} \vec{E} \cdot \vec{n} dp = \iint_{\partial T} \vec{E} \cdot \vec{n} dp = \iiint_T \operatorname{div} \vec{E} dV.$$

Ker bomo pokazali, da je $\operatorname{div} \vec{E} = 0$, sledi od tod $\iint_{\mathcal{P}} \vec{E} \cdot \vec{n} dp = \iint_{S_a} \vec{E} \cdot \vec{n} dp = 4\pi e$, pri čemer smo zadnji integral izračunali že v zgledu na začetku tega razdelka.

Izračunati moramo le še $\operatorname{div} \vec{E}$. Napisano po komponentah se polje $\vec{E}$ glasi

$$\vec{E} = \frac{e}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z).$$

Njegova prva komponenta je torej

$$E_1 = e \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

njen parcialni odvod na x pa

$$\frac{\partial E_1}{\partial x} = e \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - 3x^2(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} = e \frac{R^2 - 3x^2}{R^5},$$

kjer smo označili $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Zaradi simetrije sedaj lahko uganemo $\frac{\partial E_2}{\partial y}$ in $\frac{\partial E_3}{\partial z}$ ter nato izračunamo

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial z} = e \frac{3R^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)}{R^5} = 0.$$

Naloge. 1. Izračunajte na dva načina (po definiciji in s pomočjo Gaussovega izreka) pretok vektorskega polja $\vec{F}(x, y, z) = (xy, y^2, y^2)$ skozi rob kocke $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$. (Rezultat $\frac{8\pi}{3}$.)

2. Izračunajte pretok vektorskega polja $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r}$ skozi rob telesa, omejenega s paraboloidom $z = x^2 + y^2$, valjem $x^2 + y^2 = 9$ in ravnino $z = 0$. (Rezultat $\frac{243\pi}{2}$.)

3. (i) Naj bo $\vec{F}$ dvakrat zvezno odvedljivo vektorsko polje na $\mathbb{R}^3$. Izračunajte, da je $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} = 0$.

(ii) Če za vektorsko polje $\vec{G}$ na $\mathbb{R}^3$ velja $\operatorname{div} \vec{G} = 0$, potem obstaja tako vektorsko polje $\vec{F}$, da je $\vec{G} = \operatorname{rot} \vec{F}$. (Rešitev. $\vec{F}$ bomo poiskali v obliki $\vec{F} = (F_1, F_2, 0)$. Tedaj se pogoj $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{G}$ glasi

$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = -G_1, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = G_2 \quad \text{in} \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0.$$

Iz prvih dveh enačb sledi

$$F_2 = - \int_{z_0}^z G_1(x, y, t) dt + N(x, y) \quad \text{in} \quad F_1 = \int_{z_0}^z G_2(x, y, t) dt + M(x, y),$$

kjer sta M in N poljubni odvedljivi funkciji, z_0 pa konstanta. Ko vstavimo to v tretjo enačbo, se glasi

$$G_3(x, y, z) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y, z) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y, z)$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{z_0}^z \left[\frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} \right] (x, y, t) dt + \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) \\
&= \int_{z_0}^z \frac{\partial G_3}{\partial z}(x, y, t) dt + \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) \quad (\text{kjer smo upoštevali, da je } \operatorname{div} \vec{G} = 0) \\
&= G_3(x, y, z) - G_3(x, y, z_0) + \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x, y).
\end{aligned}$$

Od tod sledi, da moramo M in N določiti tako, da bo

$$\frac{\partial N}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = G_3(x, y, z_0).$$

To je mogoče, saj lahko izberemo npr. $M \equiv 0$ in $N = \int G_3(s, y, z_0) ds$.)

LITERATURA

- [1] J. C. Burkill in H. Burkill, *A second course in mathematical analysis*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002.
- [2] J. Hubbard in B. B. Hubbard, *Vector calculus, linear algebra, and differential forms: a unified approach*, Matrix editions, 2009.
- [3] B. Magajna, *Linearna algebra, metrični prostor in funkcije več spremenljivk*, Matematika - fizika **50**, DMFA Slovenije, Ljubljana, 2011.
- [4] B. Magajna, *Uvod v diferencialne enačbe, kompleksno in Fourierovo analizo*, Matematika - fizika **55**, DMFA Slovenije, Ljubljana, 2018.
- [5] M. Spivak, *Calculus on Manifolds*, Addison-Wesley publ. comp., New York, 1965.
- [6] I. Vidav, *Višja matematika I*, Matematika - fizika **6**, DMFA Slovenije, Ljubljana, 1994.

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO, UNIVERZA V LJUBLJANI