

Bojan Magajna

**Uvod v
diferencialne
enačbe,
kompleksno in
Fourierovo analizo**

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right)$$

Kazalo

Predgovor	9
1. Osnovno o diferencialnih enačbah	13
1.1. Nekatere enačbe 1. reda, ki nastopajo pogosto	13
1.2. Homogena linearna diferencialna enačba 2. reda	25
1.3. Prevedba reševanja na homogeno enačbo	31
1.4. Enačba s konstantnimi koeficienti in Eulerjeva enačba	33
1.5. Ničle rešitev homogenih linearnih enačb 2. reda	40
1.6. Sistemi linearnih diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti	44
1.7. Obstoj in enoličnost rešitev	49
1.8. Odvedljivost rešitev na začetne pogoje in parametre†*	60
1.9. Tok vektorskega polja†*	68
2. Holomorfne funkcije	73
2.1. Poti in območja v kompleksni ravnini	73
2.2. Odvedljivost v kompleksnem smislu in konformnost	74
2.3. Cauchy-Riemannovi enakosti	79
2.4. Integriranje kompleksnih funkcij	82
2.5. Ovojno število	86
2.6. Cauchy-Greenova formula za pravokotnik	88
2.7. Splošna Cauchy-Greenova formula in njene posledice	95
2.8. Razvoj v Laurentovo in v Taylorjevo vrsto	101
2.9. Logaritem in potence	108
2.10. Izrek o residuih in njegova uporaba pri računanju integralov	110
2.11. Odprtost holomorfnih preslikav in njene posledice	119
2.12. Zaporedja holomorfnih funkcij†	124
2.13. Homotopija krivulj†	128
2.14. Konformna ekvivalentnost enostavno povezanih območij†	133
2.15. Predstavitev holomorfnih funkcij z neskončnimi produkti†	136
2.16. Eulerjeva funkcija Γ	144
3. Pogled v harmonične funkcije	155
3.1. Harmonične funkcije v ravnini	155
3.2. Harmonične funkcije v prostoru	161

4. Fourierove vrste in Fourierova transformacija	169
4.1. Hilbertov prostor	169
4.2. Fourierove vrste	186
4.3. Konvolucija	201
4.4. Fourierova transformacija	208
4.5. Fourierova transformacija v $\mathbb{R}^n$	221
4.6. Laplaceova transformacija	226
5. Robni problemi za linearne diferencialne enačbe 2. reda	241
5.1. Nihanje strune	241
5.2. Sturm-Liouvillov problem	250
5.3. Dokaz Sturm-Liouvillovega izreka ^{†*}	257
5.4. Reševanje linearnih diferencialnih enačb s potenčnimi vrstami	269
5.5. Legendreovi in drugi ortogonalni polinomi	272
5.6. Stacionarna porazdelitev temperature na krogli	288
5.7. Pravilna singularna točka diferencialne enačbe	291
5.8. Besselova enačba	296
5.9. Nihanje krožne membrane	311
5.10. Hipergeometrijska enačba [†]	320
Literatura	327
Stvarno kazalo	331

Osnovno o diferencialnih enačbah

Splošna *diferencialna enačba reda n* je enačba oblike

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

kjer je F dana funkcija $n + 2$ spremenljivk (definirana na kakem območju v $\mathbb{R}^{n+1}$), y neznana funkcija spremenljivke x , $y^{(k)}$ pa njeni odvodi. (*Območje* pomeni odprto povezano množico.) *Red enačbe* je torej red najvišjega odvoda, ki nastopa v enačbi. Ker je tukaj y funkcija ene same spremenljivke, imenujemo take enačbe tudi *navadne* diferencialne enačbe, za razliko od parcialnih, v katerih nastopajo kot neznanke funkcije več spremenljivk. Niti enačbe 1. reda niso vedno rešljive; npr. enačbe $(y')^2 + 1 = 0$ ne more rešiti nobena funkcija y z realnimi vrednostmi, saj je vedno $(y')^2 + 1 \geq 1$. Ta razlog pa je povsem algebraičen; če se da enačbo napisati v obliki $y' = f(x, y)$, kjer je f zvezna funkcija, se da pokazati, da ima vedno rešitev (vsaj lokalno), vendar se bomo z obstojem rešitev na splošno ukvarjali kasneje. Najprej si bomo ogledali nekatere vrste enačb, ki jih je mogoče rešiti elementarno. Kot je razvidno že iz enačbe $y' = 1$ (katere rešitve so $y = x + C$, kjer je C poljubna konstanta), je rešitev diferencialne enačbe v splošnem družina funkcij (in ne zgolj ena sama funkcija). *Splošno rešitev* enačbe bomo imenovali rešitev, ki zajema (kot posebne primere) vse možne rešitve. Vsako funkcijo, ki zadošča enačbi, pa lahko potem imenujemo *delna ali partikularna rešitev*.

Do diferencialnih enačb privedejo mnogi problemi z drugih področij znanosti, kot bomo videli v zgledih in nalogah.

1.1. Nekatere enačbe 1. reda, ki nastopajo pogosto

Oglejmo si nekaj primerov enačb 1. reda, ki jih je mogoče rešiti elementarno.

1.1.1. Enačba z ločljivima spremenljivkama

Tako imenujemo enačbo, ki jo lahko zapišemo v obliki

$$g(y)y' = f(x),$$

kjer sta f in g dani zvezni funkciji. Tedaj lahko obe strani enačbe integriramo, da dobimo

$$\int g(y) dy = \int f(x) dx$$

oziroma

$$G(y) = F(x) + C, \quad (1.1.1)$$

kjer smo z G in F označili funkciji, ki ju dobimo po integriranju funkcij g in f , C pa je integracijska konstanta. (Zadošča pisati le eno integracijsko konstanto, saj se integracijski konstanti leve in desne strani odštejeta v eno konstanto.) Če se da iz (1.1.1) izraziti y kot funkcijo spremenljivke x , smo tako dobili rešitev, sicer pa štejemo, da predstavlja (1.1.1) rešitev v implicitni obliki.

ZGLED 1.1.1. Enačbo

$$yy' = 2(xy + x)$$

lahko preoblikujemo (če $y \neq -1$) v

$$\frac{y}{y+1} dy = 2x dx,$$

kjer sta spremenljivki ločeni. To lahko napišemo tudi v obliki $(1 - \frac{1}{y+1}) dy = 2x dx$ in po integriranju dobimo

$$y - \ln|y+1| = x^2 + C,$$

kar štejemo za implicitno podano rešitev. Toda tudi konstantna funkcija $y = -1$ je očitno rešitev enačbe, ki smo jo izgubili pri deljenju.

OPOMBA 1.1.2. Če želimo biti popolnoma dosledni, moramo zapisati, da je

$$\int \frac{1}{y+1} dy = \begin{cases} \ln(y+1) + C_1, & \text{če je } y+1 > 0, \\ \ln|y+1| + C_2, & \text{če je } y+1 < 0, \end{cases}$$

kjer konstanti C_1 in C_2 nista nujno enaki. Zato zgoraj zapisana rešitev enačbe ni povsem splošna, vendar bomo zaradi jedrnatosti v podobnih primerih tudi v prihodnje pisali, da je kar $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$, čeprav to ni povsem korektno, ker konstanta C ni nujno ista za pozitivne in negativne x .

1.1.2. Enačba oblike $y' = f(\frac{y}{x})$

Tukaj je f zvezna funkcija. Z novo neznanko $v = \frac{y}{x}$, torej $y = xv$ in $y' = xv' + v$, tako enačbo preoblikujemo v enačbo

$$xv' = f(v) - v,$$

kjer sta spremenljivki x in v ločljivi.

ZGLED 1.1.3. Enačbo

$$y' = \frac{x+y}{x-y} = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$$

substitucija $v = \frac{y}{x}$ preoblikuje v

$$xv' = \frac{1+v}{1-v} - v = \frac{1+v^2}{1-v}.$$

Ko ločimo spremenljivki, dobimo

$$\frac{1-v}{1+v^2} dv = \frac{dx}{x}.$$

Z integriranjem dobimo

$$\operatorname{arctg} v - \frac{1}{2} \ln(1+v^2) = \ln|x| + C$$

oziroma

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + C,$$

kar štejemo za implicitno podano rešitev.

1.1.3. Linearna enačba 1. reda

To je vsaka enačba, ki se jo da preoblikovati v

$$y' = py + q, \quad (1.1.2)$$

kjer sta p in q dani (zvezni) funkciji na kakem intervalu I , ki je lahko tudi poltrak ali cela realna os. Če je $q \equiv 0$, imenujemo enačbo *homogena*. Tedaj sta spremenljivki ločljivi, $\frac{dy}{y} = p dx$, in z integriranjem dobimo $\ln y = P + \ln C$, kjer je $P(x) := \int_a^x p(t) dt$ (za kako poljubno izbrano začetno točko $a \in I$), integracijsko konstanto pa smo imenovali $\ln C$ (namesto C). Potem je

$$y = Ce^P. \quad (1.1.3)$$

Korektnost tega postopka je sicer vprašljiva, ker smo delili s funkcijo y , ki ima morda ničle, pa tudi integral $\int \frac{dy}{y}$ je $\ln|y|$ (ne le $\ln y$). Vendar pa lahko z enostavnim računom preverimo, da je enačba $y' = py$ ekvivalentna enačbi $(ye^{-P})' = 0$, torej mora biti ye^{-P} konstanta, imenujmo jo C , zato $y = Ce^P$.

Da bi rešili prvotno enačbo (1.1.2), ko q ni identično 0, pa bomo sedaj vstavili vanjo izraz (1.1.3), kjer pa C ne bo več konstanta, temveč nova neznanka. Postopek imenujemo zato *variacija konstante*. Torej je $y' = C'e^P + Ce^P p$ (kjer smo upoštevali, da je $P' = p$). Enačbo (1.1.2) tako preoblikujemo v

$$C'e^P = q.$$

Od tod je $C = \int_a^x e^{-P(t)} q(t) dt + K$, kjer je K konstanta, in potem

$$y(x) = Ce^{P(x)} = e^{P(x)} \int_a^x e^{-P(t)} q(t) dt + Ke^{P(x)}.$$

ZGLED 1.1.4. Rešimo enačbo

$$xy' - 3y = x^4. \quad (1.1.4)$$

Ko v homogeni enačbi $xy' - 3y = 0$ ločimo spremenljivki, dobimo $\frac{dy}{y} = 3\frac{dx}{x}$, torej $\ln y = 3 \ln x + \ln C$ oziroma $y = Cx^3$. Ko vstavimo ta izraz v prvotno enačbo (1.1.4) (pri čemer pa C ni več konstanta) in uredimo, dobimo

$$C'x^4 = x^4.$$

Od tod je $C = x + K$, kjer je K konstanta, in končno $y = Cx^3 = (x + K)x^3$.

1.1.4. Bernoullijeva enačba

To je enačba oblike

$$y' = py + qy^n, \quad (1.1.5)$$

kjer sta p in q dani zvezni funkciji, n pa (realna) konstanta, $n \neq 0, 1$. Kadar je $n > 0$, je ena rešitev te enačbe $y \equiv 0$. Če enačbo delimo z y^n , opazimo, da jo vpeljava nove neznanke $v = y^{1-n}$ spremeni v linearno. Tedaj je namreč $y = v^{\frac{1}{1-n}}$, $y' = \frac{1}{1-n} v^{\frac{1}{1-n}-1} v'$ in s kratkim računom preoblikujemo Bernoullijevo enačbo v

$$\frac{1}{1-n} v' = pv + q, \quad (1.1.6)$$

ki je linearna. Pri tem smo delili z $v^{\frac{n}{1-n}}$ in tako »izgubili« rešitve v , ki so identično 0 na kakem intervalu, če je $n > 0$. V vsaki ničli x_0 funkcije v je tudi $y(x_0) = 0$ in $y'(x_0) = \frac{1}{1-n} v(x_0)^{\frac{n}{1-n}} v'(x_0) = 0$, če je $n \in (0, 1)$, zato lahko v točki $(x_0, 0)$ »zlepimo« rešitvi $y \equiv 0$ in $y = v^{\frac{1}{1-n}}$. Npr. funkcija, enaka 0 za $x \leq x_0$ in enaka $v(x)^{\frac{1}{1-n}}$ za $x > x_0$, je tudi rešitev.

ZGLED 1.1.5. (i) Enačbo

$$xy' + y = x^4 y^3$$

preoblikuje substitucija $v = y^{-2}$ (ki pa pozablja na morebitne ničle funkcije y) v

$$-\frac{1}{2} v' = -\frac{1}{x} v + x^3. \quad (1.1.7)$$

Homogeni del te linearne enačbe, $\frac{1}{2}v' = \frac{1}{x}v$, napišemo kot $\frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x}$ in integriramo, kar privede do $\ln v = 2 \ln x + \ln C$ oziroma $v = Cx^2$. Ko po metodi variacije konstante vstavimo to v linearno enačbo (1.1.7) in uredimo, dobimo $-\frac{1}{2}C' = x$, torej je $C = -x^2 + K$, kjer je K konstanta. Zato je $v = Cx^2 = -x^4 + Kx^2$ in končno $y = \pm v^{-\frac{1}{2}} = \pm (Kx^2 - x^4)^{-\frac{1}{2}}$. Rešitev pa je tudi $y \equiv 0$.

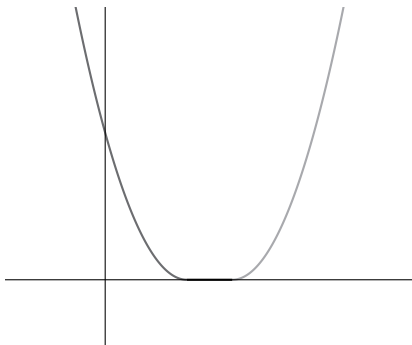
(ii) Enačba

$$y' = 2y^{1/2} \quad (1.1.8)$$

je Bernoullijeva (in z ločljivima spremenljivkama). Če za hip spregledamo možnost ničel rešitev, jo lahko napišemo kot $\frac{1}{2}y^{-1/2}y' = 1$ oziroma $(y^{1/2})' = 1$. Torej je $y = (x+c)^2$, kjer je c poljubna konstanta, rešitev enačbe (1.1.8). Tudi funkcija $y \equiv 0$ je očitno rešitev enačbe (1.1.8). Za vsak c sta potem tudi funkciji

$$y = \begin{cases} 0, & x \leq -c, \\ (x+c)^2, & x > -c \end{cases} \quad \text{in} \quad y = \begin{cases} (x+c)^2, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

rešitvi enačbe (1.1.8). Vse te štiri rešitve zadoščajo istemu začetnemu pogoju $y(-c) = 0$. Nadaljnje rešitve dobimo, če v točki $(c, 0)$ zlepimo del parabole $y = (x-c)^2$, $x \leq c$, z daljico $y = 0$, $c \leq x \leq d$, v točki $(d, 0)$ pa to daljico z delom parabole $y = (x-d)^2$, $x \geq d$, kjer sta c in d poljubni realni konstanti in $c \leq d$.



SLIKA 1.1. V točki $C = (c, 0)$ je mogoče zlepi del parabole $y = (x - c)^2$ ($x \leq c$) z daljico $y = 0$ ($c \leq x \leq d$), to pa nato z delom parabole $y = (x - d)^2$ ($x \geq d$) v novo rešitev.

1.1.5. Eksaktna enačba

Diferencialno enačbo $y' = f(x, y)$ lahko zapišemo tudi kot $f(x, y) dx - dy = 0$. Splošnejšo enačbo take oblike

$$\omega := f(x, y) dx + g(x, y) dy = 0 \quad (1.1.9)$$

znamo rešiti, če je izraz ω totalni diferencial kake funkcije u , torej $\omega = du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$. Tedaj namreč enačba $\omega = du = 0$ pomeni le (na povezanem območju v ravnini), da je funkcija u konstantna, torej $u(x, y) = C$, kar imamo lahko za implicitno podano rešitev. Pogoj za to, da je ω totalni diferencial, se pravi, da je $f = \frac{\partial u}{\partial x}$ in $g = \frac{\partial u}{\partial y}$ za kako (predpostavimo, da dvakrat zvezno odvedljivo) funkcijo u , je enakost

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}.$$

(Da se pokazati, kot posledico Greenove formule, da je na območjih »brez lukenj« ta pogoj tudi zadosten.) Na splošno, ko ω ni totalni diferencial, nam morda uspe najti kako tako funkcijo μ brez ničel, da je $\mu\omega$ totalni diferencial kake funkcije u ; tako funkcijo μ imenujemo *integrirajoči množitelj*. Ker je tedaj enačba $\omega = 0$ ekvivalentna enačbi $du = \mu\omega = 0$, je spet $u(x, y) = C$ implicitno podana rešitev. Potreben pogoj, da je $\mu\omega$ totalni diferencial kake funkcije, je $\frac{\partial(\mu f)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu g)}{\partial x}$, se pravi

$$\frac{1}{\mu} \left(g \frac{\partial \mu}{\partial x} - f \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}. \quad (1.1.10)$$

Ta pogoj za funkcijo μ je na splošno zapleten, z njim si lahko pomagamo le v posebnih primerih. Poglejmo na primer, kdaj obstaja integrirajoči množitelj μ , ki je odvisen le od spremenljivke x (torej $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$). V tem primeru se enakost (1.1.10) poenostavi v $\frac{1}{\mu} g \frac{d\mu}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}$, kar lahko napišemo (tam, kjer g ni 0) kot

$$\frac{d(\ln \mu)}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}}{g}. \quad (1.1.11)$$

Če je izraz na desni strani v (1.1.11) odvisen le od x , potem je (vsaj na območjih »brez lukenj«)

$$\mu = e^{\int \frac{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}}{g} dx}$$

ustrezni integrirajoči množitelj.

ZGLED 1.1.6. V enačbi

$$y dx + (x^2 y - x) dy = 0 \quad (1.1.12)$$

je $f(x, y) = y$, $g(x, y) = x^2 y - x$ in

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}}{g} = \frac{2 - 2xy}{x(xy - 1)} = -\frac{2}{x}.$$

Torej je $\mu(x) = e^{-\int \frac{2}{x} dx} = e^{-2 \ln x} = x^{-2}$. Ko pomnožimo enačbo (1.1.12) z x^{-2} , dobimo

$$\frac{y}{x^2} dx + \left(y - \frac{1}{x}\right) dy = 0.$$

Sedaj je lahko preveriti, da je izraz na levi strani te enačbe totalni diferencial. Poiskati moramo tako funkcijo u , da bo

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x^2} \quad \text{in} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = y - \frac{1}{x}. \quad (1.1.13)$$

Iz prve enakosti v (1.1.13) sledi (z integriranjem po x), da je $u(x, y) = -\frac{y}{x} + C(y)$, kjer je C še neznana funkcija, ki jo določimo tako, da vstavimo ta izraz za u v drugo enakost (1.1.13). Tako dobimo

$$-\frac{1}{x} + C'(y) = y - \frac{1}{x},$$

se pravi $C'(y) = y$ in $C(y) = \frac{y^2}{2} + K$, kjer je K konstanta. Torej je $u(x, y) = -\frac{y}{x} + \frac{y^2}{2} + K$ in tako

$$-\frac{y}{x} + \frac{y^2}{2} = \text{konst.}$$

implicitno podana rešitev enačbe (1.1.12).

V nalogah bomo obravnavali še nekatere druge vrste enačb prvega reda, ki jih je mogoče rešiti eksplicitno, vendar pa te enačbe ne bodo nastopale kasneje v delu.

Naloge

1. Poiščite splošno rešitev enačbe $xe^{x^2+y} = yy'$.
2. (*Radioaktivni razpad*) Masa dm radioaktivnega elementa, ki razpade v času dt , je sorazmerna s trenutno maso m elementa, torej $dm = -\kappa m dt$, kjer je κ konstanta, odvisna od elementa. Pokažite, da je rešitev te enačbe $m = m_0 e^{-\kappa t}$, kjer je m_0 začetna masa (torej $m_0 = m(0)$). Kako se izraža konstanta κ z razpolovnim časom elementa? (Razpolovni čas je čas, v katerem se masa elementa zmanjša na polovico.)

3. (*Kemijske reakcije drugega reda*) Pri kemijski reakciji iz po ene molekule snovi A in B nastane ena molekula snovi X (in morda še drugi stranski produkti). Označimo količine teh snovi, merjene v molih, z $a(t)$, $b(t)$ in $x(t)$. Pri reakcijah *drugega reda* je hitrost $\frac{dx}{dt}$ nastajanja snovi x sorazmerna s produktom trenutnih količin snovi a in b , torej

$$\frac{dx}{dt} = \kappa ab = \kappa(a_0 - x)(b_0 - x), \quad (1.1.14)$$

kjer sta a_0 in b_0 začetni količini snovi A in B , izraženi v molih. (Zgled take reakcije je $\text{NaOH} + \text{HCl} \rightarrow \text{NaCl} + \text{H}_2\text{O}$.) Rešite enačbo (1.1.14) pri danih začetnih pogojih $a(0) = a_0$, $b(0) = b_0$, $x(0) = 0$. (Rezultat: če je $a_0 \neq b_0$, je $x(t) = \frac{a_0 b_0 (e^{\kappa(b_0 - a_0)t} - 1)}{b_0 e^{\kappa(b_0 - a_0)t} - a_0}$. Če pa je $b_0 = a_0$, je $x(t) = a_0 - \frac{a_0}{a_0 \kappa t + 1}$. Skicirajte graf zadnje funkcije, imenovane *logistična krivulja*. Pokažite tudi, da prva rešitev konvergira proti drugi, ko gre b_0 proti a_0 .)

4. Z vpeljavo nove spremenljivke rešite diferencialno enačbo $y' = (y - x)^2$.
5. Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe $y' = \frac{2x + 3y}{3x - 2y}$.
6. Rešite diferencialno enačbo $y' = \frac{x + y + 4}{x - y - 6}$.
(Namig: vpeljite novi spremenljivki $\xi = x + a$ in $\eta = y + b$, kjer sta konstanti a in b tako določeni, da se v novih spremenljivkah enačba glasi $\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\xi + \eta}{\xi - \eta}$.)
7. Poiščite splošno rešitev enačbe $y' = \frac{2x + 2y + 1}{3x + y - 2}$.
8. Poiščite splošno rešitev diferencialnih enačb:
- (i) $xy' - y = x^2 \cos x$;
 - (ii) $y' + y = x^2 + 2xe^{-x}$;
 - (iii) $(e^y - 2xy)y' = y^2$ (namig: zamenjajte vlogi spremenljivk x in y).
9. Med rešitvami enačbe $y' = y + x$ določite tiste, ki so naraščajoče na poltraku $[0, \infty)$.
10. Poiščite tisto rešitev diferencialne enačbe $y' = x(y^2 + 1)$, ki zadošča pogoju $y(0) = 1$.
11. Napišite tisto rešitev enačbe $y' = y + f(x)$, ki zadošča pogoju $y(0) = 0$. Ali je lahko kaka rešitev te enačbe omejena, če je f pozitivna zvezna funkcija na $\mathbb{R}$?
12. Napišite splošno rešitev diferencialne enačbe $y' = -y + f(x)$. Če je f na vsej realni osi omejena in zvezna funkcija, pokažite, da so vse rešitve omejene na poltraku $[0, \infty)$.

- 13.** (*Idealno zrcalo*) Od katere ravninske krivulje se vsi žarki, izhajajoči iz koordinatnega izhodišča, odbijejo vzporedno z abscisno osjo? (Rešitev: Naj žarek, izhajajoč iz izhodišča, oklepa s pozitivnim poltrakom abscisne osi kot φ in naj zadene krivuljo $y = y(x)$, ki predstavlja obliko zrcala, v točki $T(x, y(x))$. Naj bo α kot, ki ga ta žarek oklepa s tangento t na krivuljo v točki $T(x, y(x))$ in naj bo S presečišče te tangente z abscisno osjo. Ker je odbiti žarek vzporeden z abscisno osjo in oklepa enak kot α s tangento t , sledi, da je φ (zunanj kot trikotnika OTS) enak 2α (vsota nasprotnoležnih notranjih kotov). Ker je $\operatorname{tg} \alpha = y'(x)$ in $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y(x)}{x}$, dobimo iz trigonometrijske formule $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$ diferencialno enačbo

$$\frac{y}{x} = \frac{2y'}{1 - (y')^2}.$$

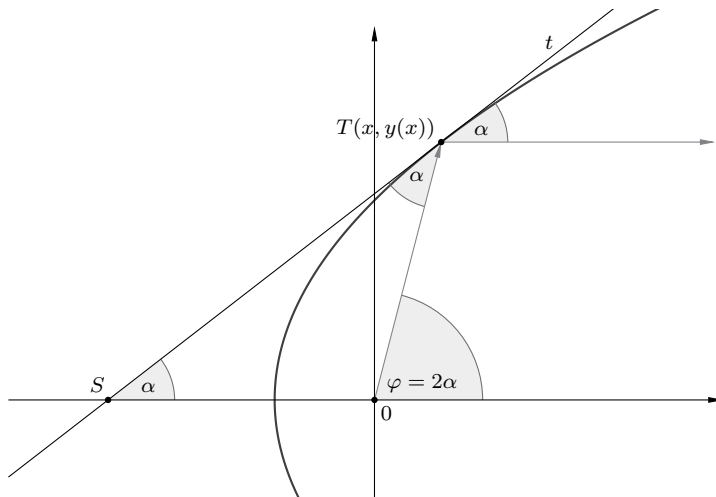
Od tod izrazimo

$$y' = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + y^2}}{y}.$$

To enačbo bi lahko rešili z vpeljavo nove neznanke $v = \frac{y}{x}$, vendar je nekoliko krajša drugačna pot. Pišimo $y' = \frac{dy}{dx}$ in preoblikujmo enačbo v $x dx + y dy = \pm \sqrt{x^2 + y^2} dx$ oziroma v

$$\pm \frac{1}{2} \frac{d(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = dx.$$

Z integriranjem dobimo od tod $\pm \sqrt{x^2 + y^2} = x + C$, kjer je C konstanta. To lahko preuredimo v $y^2 = 2Cx + C^2$, kar predstavlja družino parabol, s skupno osjo (sovpadajočo z abscisno osjo) in skupnim goriščem 0 .



SLIKA 1.2. Idealno zrcalo.

14. Rešite enačbe:

$$(i) \quad x \, dy - y \, dx = (1 + y^2) \, dy;$$

$$(ii) \quad (3x^2 - y^2) \, dy - 2xy \, dx = 0;$$

$$(iii) \quad y \, dx + (x^2y - x) \, dy = 0.$$

(Navodilo: enačbo lahko preoblikujemo najprej v $y \, dx - x \, dy + x^2y \, dy = 0$, nato v $-x^2d(\frac{y}{x}) + x^2y \, dy = 0$ oziroma $d(\frac{y^2}{2} - \frac{y}{x}) = 0$.)

15. (*Družine krivulj*) Pri fiksni vrednosti parametra c predstavlja enačba

$$f(x, y, c) = 0 \quad (1.1.15)$$

ravninsko krivuljo (vsaj, kadar vektor $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$ ni nikjer 0). V celoti predstavlja torej taka enačba (1.1.15) družino krivulj. Pri konstantnem c pomeni zveza (1.1.15), da je (vsaj lokalno, kadar je $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$) y funkcija spremenljivke x in z odvajanjem na x dobimo iz (1.1.15)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, c) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, c)y' = 0. \quad (1.1.16)$$

Če nam uspe enačbi (1.1.15) in (1.1.16) tako skombinirati, da dobimo iz njiju neko povezavo oblike $F(x, y, y') = 0$, v kateri ni več parametra c , smo s tem dobili diferencialno enačbo dane družine krivulj (1.1.15).

(i) Poiščite na pravkar opisani način diferencialno enačbo družine koncentričnih krožnic $x^2 + y^2 = c^2$. (Rešitev: z odvajanjem na x (pri konstantnem c) dobimo $2x + 2yy' = 0$ oziroma $x + yy' = 0$, kar je že iskana enačba.)

(ii) Poiščite diferencialno enačbo družine krožnic $x^2 + y^2 = 2cx$ (katerih značilnost je, da imajo vse središča na abscisni osi in gredo skozi koordinatno izhodišče). (Rešitev: z odvajanjem na x in deljenjem z 2 dobimo $x + yy' = c$, iz enačbe same pa $c = \frac{x^2 + y^2}{2x}$, torej je $x + yy' = \frac{x^2 + y^2}{2x}$ oziroma $2xyy' = y^2 - x^2$.)

16. (*Ortogonalne trajektorije*) Ortogonalna trajektorija na dano družino krivulj $f(x, y, c) = 0$ je vsaka krivulja, ki seka vse krivulje dane družine pravokotno. Pokažite: če je $F(x, y, y') = 0$ diferencialna enačba dane družine krivulj, potem je $F(x, y, -\frac{1}{y'}) = 0$ diferencialna enačba ortogonalnih trajektorij. Poiščite tudi ortogonalne trajektorije na družini krivulj iz prejšnje naloge. (Rezultat: (i) Ortogonalne trajektorije so poltraki s krajiščem v 0. (ii) Diferencialno enačbo ortogonalnih trajektorij lahko napišemo kot $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$ (če je $y \neq \pm x$) in jo torej lahko rešujemo z novo spremenljivko $v = \frac{y}{x}$. Rešitev te enačbe je družina krožnic $x^2 + y^2 = cy$, ki imajo središča na ordinatni osi in potekajo skozi 0.)

* 17. (Riccatijeva enačba)

(i) Naj bodo p, q, r, s dane zvezno odvedljive funkcije na $\mathbb{R}$ (ali na kakem intervalu ali pa poltraku) in predpostavimo, da je funkcija $ps - qr$ brez ničel. Pokažite, da družina krivulj

$$y = \frac{p + dq}{r + ds} \quad (d \in \mathbb{R}) \quad (1.1.17)$$

zadošča Riccatijevi diferencialni enačbi oblike

$$y' = ay^2 + by + c, \quad (1.1.18)$$

kjer so a, b, c funkcije. (Namig: najprej odvajajte na x enakost $y(r + cs) = p + dq$.)

(ii) Naj bo y_0 kaka partikularna rešitev enačbe (1.1.18), y pa poljubna nadaljnja rešitev te enačbe. Pokažite, da funkcija $v := y - y_0$ zadošča Bernoullijevi enačbi $v' = (2ay_0 + b)v + av^2$. Napišite splošno rešitev te Bernoullijeve enačbe in pokažite, da ima vsaka rešitev y Riccatijeve enačbe obliko (1.1.17) za kake funkcije p, q, r, s in kako konstanto d .

† 18. (Ovojnica družine ravninskih krivulj) Ovojnica družine krivulj

$$f(x, y, c) = 0 \quad (1.1.19)$$

je krivulja (če obstaja), ki se v vsaki svoji točki dotika kake krivulje družine (1.1.19). Predpostavimo, da ovojnica obstaja in da gre skozi vsako njeno točko le ena krivulja družine. Radi bi izpeljali enačbo ovojnice. Poljubna točka (x_0, y_0) na ovojnici leži na kaki od krivulj družine; naj bo $c(x_0, y_0)$ vrednost parametra c na tej krivulji. Torej velja identiteta

$$f(x_0, y_0, c(x_0, y_0)) \equiv 0,$$

od koder sledi s totalnim diferenciranjem

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, c(x_0, y_0)) dx + \\ + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, c(x_0, y_0)) dy + \frac{\partial f}{\partial c}(x_0, y_0, c(x_0, y_0)) dc = 0. \end{aligned} \quad (1.1.20)$$

V točki (x_0, y_0) se ovojnica dotika krivulje $f(x, y, c(x_0, y_0)) = 0$, zato tam tangenta ovojnice sovpada s tangento na to krivuljo. Smerni koeficient y' tangente na krivuljo $f(x, y, c(x_0, y_0)) = 0$ (in s tem tudi tangente na ovojnico) v točki (x_0, y_0) zadošča pogoju

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, c(x_0, y_0)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, c(x_0, y_0))y'(x_0) = 0.$$

Ko zadnjo enakost pomnožimo z dx , dobimo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, c(x_0, y_0)) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, c(x_0, y_0)) dy = 0. \quad (1.1.21)$$

Iz (1.1.20) in (1.1.21) takoj sledi $\frac{\partial f}{\partial c}(x_0, y_0, c(x_0, y_0)) = 0$. Če sedaj označimo splošno točko na ovojnic kar (x, y) (namesto (x_0, y_0)), lahko zapišemo

$$\frac{\partial f}{\partial c}(x, y, c(x, y)) = 0. \quad (1.1.22)$$

Ker leži točka tudi na krivulji z vrednostjo parametra $c(x, y)$, velja tudi

$$f(x, y, c(x, y)) = 0. \quad (1.1.23)$$

Sedaj iz (1.1.23) in (1.1.22) izpeljemo enačbo, v kateri ne bo več parametra c . Tako dobimo enačbo ovojnice.

Določite enačbo ovojnice družine premic $\frac{x}{\cos c} + \frac{y}{\sin c} = 1$. (Rešitev: Enačbo te družine najprej napišemo kot

$$x \sin c + y \cos c - \frac{1}{2} \sin 2c = 0 \quad (1.1.24)$$

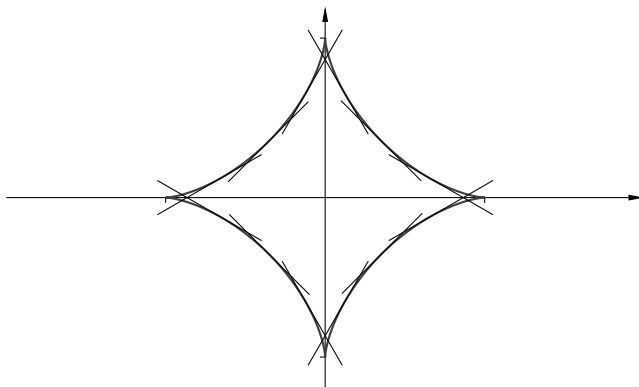
in jo nato odvajamo na c , da dobimo

$$x \cos c - y \sin c - \cos 2c = 0. \quad (1.1.25)$$

Iz sistema enačb (1.1.24) in (1.1.25) izrazimo (po kratkem računu)

$$x = \cos^3 c \quad \text{in} \quad y = \sin^3 c,$$

torej je ovojnica *asteroida* $|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = 1$.)



SLIKA 1.3. Asteroida $|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = 1$ kot ovojnica družine premic $\frac{x}{\cos c} + \frac{y}{\sin c} = 1$.

† **19.** Naj bo $f(x, y, c)$ družina rešitev enačbe $F(x, y, y') = 0$. Utemeljite, zakaj je tedaj tudi ovojnica te družine (če obstaja) rešitev iste diferencialne enačbe.

† **20.** (*Clairotova enačba*) Naj bo f poljubna zvezno odvedljiva funkcija. Pokažite, da je tedaj vsaka premica $y = cx + f(c)$ rešitev Clairotove enačbe

$$y = xy' + f(y').$$

Po nalogi 19 je tedaj rešitev tudi ovojnica te družine premic. Poiščite npr. rešitve enačbe

$$y = xy' + (y')^2.$$

(Rezultat: ovojnica družine premic $y = cx + c^2$ je $y = -\frac{x^2}{4}$.)

† **21.** *Lagrangeova enačba* je oblike

$$y = xf(y') + g(y'), \quad (1.1.26)$$

kjer sta f in g dani zvezno odvedljivi funkciji.

(i) Kdaj je premica $y = kx + n$ rešitev enačbe (1.1.26)? (Odgovor: natanko tedaj, ko je $k = f(k)$ in $n = g(k)$.)

(ii) Vpeljimo v enačbo (1.1.26) parameter $t := y'$, tako da je $y = xf(t) + g(t)$, torej $dy = f(t) dx + (xf'(t) + g'(t)) dt$. Potem z uporabo zveze $dy = y' dx = t dx$ dobimo $f(t) dx + (xf'(t) + g'(t)) dt = t dx$, od koder sledi

$$(f(t) - t) \frac{dx}{dt} + f'(t)x + g'(t) = 0,$$

kar je linearna diferencialna enačba za x kot funkcijo spremenljivke t . Njena rešitev $x = x(t, K)$ (kjer je K konstanta) predstavlja skupaj s formulo $y = xf(t) + g(t)$ parametrično enačbo krivulje, katere eksplicitna oblika bi bila rešitev Lagrangeove enačbe (1.1.26). Rešite na ta način enačbo

$$y = x(y')^2 + 2y'.$$

(Rezultat: $x = \frac{-2(t - \ln t) + K}{(t-1)^2}$, $y = \frac{-2(t - \ln t) + K}{(t-1)^2} t^2 + 2t$, kjer je K konstanta. Poleg teh krivulj sta rešitvi tudi premici $y = 0$ in $y = x + 2$.)

† **22.** Predpostavimo, da ima enoparametrična družina $y = f(x, c)$ rešitev diferencialne enačbe $F(x, y, y') = 0$ ovojnico (nalogi 18). Pokažite, da lahko (v primeru, ko je funkcija $\frac{\partial^2 f}{\partial c \partial x}$ povsod neničelna) enačbo ovojnice te družine dobimo tako, da iz sistema

$$F(x, y, y') = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y, y') = 0$$

izločimo y' (s tem dobimo formulo oblike $g(x, y) = 0$). (Namig: identiteto

$$F(x, f(x, c), \frac{\partial f}{\partial x}(x, c)) = 0$$

odvajajte na c in upoštevajte, da je na ovojnici $\frac{\partial f}{\partial c} = 0$ po nalogi 18, tako da dobite $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$.)

† **23.** Točka (x_0, y_0) je *izjemna* za enačbo $F(x, y, y') = 0$, če skozi njo v isti smeri potekata vsaj dve rešitvi enačbe. Množico vseh izjemnih točk imenujemo *diskriminantna množica* enačbe. Določite diskriminantno množico in vse rešitve diferencialne enačbe

$$(y')^2 - (x + y)y' + xy = 0. \quad (1.1.27)$$

(Rešitev: Ker lahko enačbo zapišemo kot $(y' - x)(y' - y) = 0$, je vsaka rešitev enačb $y' = x$ in $y' = y$ tudi rešitev enačbe (1.1.27). Torej so krivulje $y = \frac{x^2}{2} + C$ in $y = De^x$ rešitve enačbe (1.1.27). Ker sta oba smerna koeficienta, namreč $y' = x$ in $y' = y$, enaka natanko na premici $y = x$, potekata skozi vsako točko (a, a) na tej premici v isti smeri vsaj dve rešitvi; namreč parabola $y = \frac{x^2}{2} + (a - \frac{a^2}{2})$ in krivulja $y = ae^{x-a}$. Torej je diskriminantna množica te enačbe premica $y = x$. V vsaki točki (a, a) lahko zlepimo npr. del parabole $y = \frac{x^2}{2} + (a - \frac{a^2}{2})$ ($x \leq a$) z delom krivulje $y = ae^{x-a}$ ($x \geq a$) in dobimo tako novo rešitev enačbe skozi (a, a) .)

1.2. Homogena linearna diferencialna enačba 2. reda

Splošna linearna diferencialna enačba 2. reda se glasi

$$f(x)y'' + g(x)y' + h(x)y = d(x),$$

kjer so f, g, h in d dane (privzeli bomo, da zvezne) funkcije na kakem intervalu I (ki je lahko tudi poltrak ali pa cela realna os), y pa je neznana, dvakrat zvezno odvedljiva funkcija. Na podoben način kot enačbe drugega reda bi lahko obravnavali tudi linearne enačbe višjih redov. Vendar pa v uporabi, npr. pri proučevanju nihanj, najpogosteje nastopajo le enačbe drugega reda; zato in zaradi računske enostavnosti se bomo pri obravnavi linearnih enačb osredotočili v glavnem na enačbe drugega reda. Če je desna stran d identično enaka 0, imenujemo enačbo *homogena*. Kadar f nima ničel, dobimo po deljenju z f ekvivalentno enačbo oblike

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \quad (1.2.1)$$

kjer so p, q in r zvezne funkcije. Vse funkcije tukaj imajo lahko vrednosti v $\mathbb{C}$. Za boljše razumevanje pa bomo morali kasneje take enačbe obravnavati tudi za funkcije kompleksne spremenljivke. Tedaj bomo, namesto x , spremenljivko imenovali z , odvodi bodo kompleksni, funkcije $p, q, r \dots$ pa holomorfne na območjih v $\mathbb{C}$.

Ker enačb oblike (1.2.1) običajno ne moremo rešiti eksplicitno z znanimi funkcijami, je ugodno vedeti vsaj, da rešitve vedno obstajajo in so enolične pri danih začetnih pogojih, kar pove naslednji izrek.

IZREK 1.2.1. Če so p, q in r zvezne funkcije na intervalu I , potem za vsak $x_0 \in I$ in poljubni konstanti $y_0, \tilde{y}_0 \in \mathbb{C}$ obstaja natanko ena dvakrat zvezno odvedljiva funkcija $y : I \rightarrow \mathbb{C}$, ki zadošča enačbi (1.2.1) in začetnima pogojema

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = \tilde{y}_0.$$

Če so pri tem p, q, r realne funkcije in $y_0, \tilde{y}_0 \in \mathbb{R}$, potem je tudi rešitev y realna funkcija.

5.10. Hipergeometrijska enačba†

Diferencialne enačbe je dostikrat koristno obravnavati v razširjeni kompleksni ravnini $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

DEFINICIJA 5.10.1. Točka ∞ je *pravilna singularna točka* enačbe

$$y'' + p(z)y' + q(z)y = 0, \quad (5.10.1)$$

če je 0 pravilna singularna točka enačbe, ki jo dobimo iz (5.10.1) s substitucijo $z = \zeta^{-1}$.

Iz

$$y' = \frac{dy}{dz} = \frac{\frac{dy}{d\zeta}}{\frac{dz}{d\zeta}} = -\zeta^2 \frac{dy}{d\zeta}$$

sledi

$$y'' = -\zeta^2 \frac{dy'}{d\zeta} = -\zeta^2 \frac{d}{d\zeta} \left(-\zeta^2 \frac{dy}{d\zeta} \right) = \zeta^4 \frac{d^2 y}{d\zeta^2} + 2\zeta^3 \frac{dy}{d\zeta},$$

zato ta substitucija preoblikuje enačbo (5.10.1) v

$$\frac{d^2 y}{d\zeta^2} + \left(\frac{2}{\zeta} - \frac{p\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\zeta^2} \right) \frac{dy}{d\zeta} + \frac{q\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\zeta^4} y = 0. \quad (5.10.2)$$

Da bo 0 pravilna singularna točka enačbe (5.10.2), sme imeti funkcija $2\zeta^{-1} - \zeta^{-2}p(\zeta^{-1})$ v 0 kvečjemu pol stopnje 1, funkcija $\zeta^{-4}q(\zeta^{-1})$ pa kvečjemu pol stopnje 2; torej mora imeti funkcija $p(\zeta^{-1})$ v 0 ničlo, funkcija $q(\zeta^{-1})$ pa ničlo reda vsaj 2. Potemtakem velja naslednja trditev:

TRDITEV 5.10.2. *Točka ∞ je pravilna singularna točka enačbe (5.10.1) natanko tedaj, ko je $p(\infty) = 0$ in je ∞ ničla reda vsaj 2 za funkcijo q .*

DEFINICIJA 5.10.3. Enačbo oblike (5.10.1), v kateri sta p in q holomorfnii funkciji na $\hat{\mathbb{C}}$, razen v izoliranih točkah, ki pa so vse pravilne singularne točke, imenujemo *Fuchsova enačba*.

Takih enačb je manj, kot bi pričakovali prvi hip. Ker je $\hat{\mathbb{C}}$ kompaktna množica, je namreč izoliranih singularnih točk lahko le končno mnogo, sicer bi bilo stekališče takih točk neizolirana singularna točka. Naj bodo $z_1, \dots, z_n$ vse končne singularne točke Fuchsove enačbe (5.10.1). Ker smeta imeti v teh točkah funkciji p in q le pole prve oziroma druge stopnje, sta oblike

$$p(z) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{z - z_k} + p_1(z) \quad \text{in} \quad q(z) = \sum_{k=1}^n \left[\frac{B_k}{(z - z_k)^2} + \frac{C_k}{z - z_k} \right] + q_1(z)$$

za kake konstante A_k, B_k, C_k in funkciji p_1, q_1 , ki sta holomorfnii na $\mathbb{C}$. Ker je tudi ∞ pravilna singularna točka enačbe (ali pa je regularna), morata imeti funkciji

(p in q , zato tudi) p_1 in q_1 v ∞ ničlo, torej sta omejeni in zato po Liouvillovem izreku konstantni. Torej sta funkciji p_1 in q_1 identično enaki 0, se pravi, da je

$$p(z) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{z - z_k} \quad \text{in} \quad q(z) = \sum_{k=1}^n \left[\frac{B_k}{(z - z_k)^2} + \frac{C_k}{z - z_k} \right]. \quad (5.10.3)$$

Pogoj, da mora imeti q v ∞ ničlo reda vsaj 2 (torej $\lim_{z \rightarrow \infty} zq(z) = 0$), pomeni, da je

$$\sum_{k=1}^n C_k = 0. \quad (5.10.4)$$

Določitvena enačba za karakteristična eksponenta v točki z_k se glasi

$$\mu(\mu - 1) + A_k\mu + B_k = 0. \quad (5.10.5)$$

Določitvena enačba v točki ∞ (ki je po definiciji določitvena enačba za enačbo (5.10.2) v točki $\zeta = 0$) pa bo sledila iz razvojov

$$\frac{2}{\zeta} - \frac{p(\zeta^{-1})}{\zeta^2} = \frac{2}{\zeta} - \frac{1}{\zeta^2} \sum_{k=1}^n \frac{A_k \zeta}{1 - z_k \zeta} = \frac{1}{\zeta} \left[2 - \sum_{k=1}^n A_k (1 + z_k \zeta + z_k^2 \zeta^2 + \dots) \right]$$

in

$$\begin{aligned} \frac{q(\zeta^{-1})}{\zeta^4} &= \frac{1}{\zeta^4} \sum_{k=1}^n \left[\frac{B_k \zeta^2}{(1 - z_k \zeta)^2} + \frac{C_k \zeta}{1 - z_k \zeta} \right] \\ &= \frac{1}{\zeta^2} \sum_{k=1}^n B_k (1 + 2z_k \zeta + \dots) + \frac{1}{\zeta^3} \sum_{k=1}^n C_k (1 + z_k \zeta + z_k^2 \zeta^2 + \dots). \end{aligned}$$

Od tod preberemo koeficient A_∞ pred $\frac{1}{\zeta}$ v razvoju funkcije $2\zeta^{-1} - \zeta^{-2}p(\zeta^{-1})$ in koeficient B_∞ pred $\frac{1}{\zeta^2}$ v razvoju funkcije $\zeta^{-4}q(\zeta^{-1})$:

$$A_\infty = 2 - \sum_{k=1}^n A_k, \quad B_\infty = \sum_{k=1}^n (B_k + z_k C_k). \quad (5.10.6)$$

Določitvena enačba v ∞ je torej $\mu(\mu - 1) + A_\infty\mu + B_\infty$, kjer sta konstanti A_∞ in B_∞ dani z (5.10.6). Po Vietovih formulah je vsota karakterističnih eksponentov $\mu_{1,k}$ in $\mu_{2,k}$ v točki z_k enaka

$$\mu_{1,k} + \mu_{2,k} = 1 - A_k,$$

v točki ∞ pa

$$\mu_{1,\infty} + \mu_{2,\infty} = 1 - A_\infty.$$

Od tod in iz (5.10.6) takoj sledi, da je $\mu_{1,\infty} + \mu_{2,\infty} + \sum_{k=1}^n (\mu_{1,k} + \mu_{2,k}) = 1 - A_\infty + n - \sum_{k=1}^n A_k = n - 1$. S tem smo dokazali:

TRDITEV 5.10.4. Vsota vseh karakterističnih eksponentov Fuchsove enačbe, ki ima n končnih singularnih točk, je $n - 1$.

Ker je vsaka bijektivna ulomljena linearna transformacija kompozitum translacij, rotacij, raztegov in inverzij (naloga 10 iz razdelka 2.8), je lahko videti, da take transformacije preoblikujejo enačbo (5.10.1) v enačbo enake vrste in preslikajo pravilne singularne točke v pravilne singularne točke.

ZGLED 5.10.5. (i) Če ima enačba (5.10.1) le eno pravilno singularno točko, recimo, da je to ∞ , se po gornjih ugotovitvah (torej po (5.10.3), kjer je $n = 0$ in zato $p \equiv 0 \equiv q$) glasi $y'' = 0$.

(ii) Fuchsova enačba z dvema pravilnima singularnima točkama, 0 in ∞ pa se po (5.10.3) in (5.10.4) glasi

$$y'' + \frac{A}{z} y' + \frac{B}{z^2} y = 0,$$

kjer sta A in B konstanti. To je Eulerjeva enačba, ki smo jo spoznali že prej.

(iii) Fuchsova enačba s tremi singularnimi točkami, $0, 1, \infty$, pa se glasi (spet po (5.10.3) in (5.10.4))

$$y'' + \left[\frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z-1} \right] y' + \left[\frac{B_1}{z^2} + \frac{B_2}{(z-1)^2} + \frac{C}{z} - \frac{C}{z-1} \right] y = 0, \quad (5.10.7)$$

kjer so A_j, B_j in C poljubne konstante. Tako enačbo imenujemo *Riemannova*.

TRDITEV 5.10.6. *Riemannova enačba je določena s svojimi karakterističnimi eksponenti.*

DOKAZ. Označimo karakteristična eksponenta v točki 0 z α_1, α_2 , v točki 1 z β_1, β_2 , v točki ∞ pa z γ_1, γ_2 . Iz določitenih enačb $\mu^2 + (A_k - 1)\mu + B_k = 0$ v točkah 0 in 1 sledi po Vietovih formulah

$$A_1 = 1 - \alpha_1 - \alpha_2, \quad A_2 = 1 - \beta_1 - \beta_2, \quad B_1 = \alpha_1 \alpha_2, \quad B_2 = \beta_1 \beta_2. \quad (5.10.8)$$

Po (5.10.6) se določitvena enačba v ∞ glasi $\mu(\mu-1) + (2-A_1-A_2)\mu + (B_1+B_2-C) = 0$, kar lahko napišemo kot (ko upoštevamo (5.10.8))

$$\mu(\mu-1) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2)\mu + (\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 - C) = 0.$$

Ko vstavimo v to enačbo eno njeno rešitev, namreč γ_1 , dobimo

$$C = \gamma_1(\gamma_1 - 1) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2)\gamma_1 + \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 = \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 - \gamma_1 \gamma_2. \quad (5.10.9)$$

Pri tem smo za izpeljavo zadnje enakosti uporabili trditev 5.10.4, po kateri je $\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 = 1 - \gamma_1 - \gamma_2$. Tako smo vse konstante A_j, B_j, C v Riemannovi enačbi izrazili s karakterističnimi eksponenti. $\square$

Če vpeljemo v Riemannovo enačbo novo neznanko u prek zveze $y = z^\alpha u$, kjer je α konstanta, dobimo spet Riemannovo enačbo, le da z novimi eksponenti. Z oznakami iz dokaza prejšnje trditve se novi eksponenti glasiyo: $\alpha_1 - \alpha, \alpha_2 - \alpha$ (v točki 0); β_1, β_2 (v točki 1); $\gamma_1 + \alpha, \gamma_2 + \alpha$ (v točki ∞). (Da se eksponenta v 1 ne spremenita, je razumljivo, saj je funkcija z^α holomorfná v okolici točke 1 .) Če torej izberemo $\alpha = \alpha_1$, bo eden od

novih eksponentov v točki 0 enak 0. Podobno lahko s substitucijo oblike $u = (z-1)^\beta v$ dosežemo, da bo v točki 1 eden od eksponentov enak 0 (eksponenta v točki 0 pa se ne spremenita). Na ta način lahko torej Riemannovo enačbo poenostavimo tako, da so njeni eksponenti oblike: $0, 1 - c$ (v točki 0); a, b (v ∞); $0, 1 - (1 - c) - a - b$ (v 1). Pri tem smo uporabili trditev 5.10.4. Tako reducirano Riemannovo enačbo lahko sedaj po (5.10.7), (5.10.8) in (5.10.9) napišemo kot

$$y'' + \left[\frac{c}{z} + \frac{1 - c + a + b}{z - 1} \right] y' + \left[-\frac{ab}{z} + \frac{ab}{z - 1} \right] y = 0$$

oziroma

$$z(z-1)y'' + [(a+b+1)z-c]y' + aby = 0. \quad (5.10.10)$$

To je *Gaussova* ali *hipergeometrijska* enačba. Ker je določena s svojimi tremi pravičnimi singularnimi točkami in karakterističnimi eksponenti v njih, kolekcijo njenih rešitev označujejo kot

$$P \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a; \quad z \\ 1 - c & c - a - b & b \end{pmatrix}.$$

Vendar pa se tukaj ne bomo zelo poglobili v hipergeometrijsko enačbo in te oznake ne bomo uporabljali. Poiščimo le rešitve v okolici točke 0. Ker je eden od karakterističnih eksponentov enak 0, lahko eno rešitev iščemo kar z nastavkom $y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ ($c_0 \neq 0$). Ko ga vstavimo v enačbo (5.10.10), dobimo

$$(z^2 - z) \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)c_k z^{k-2} + [(a+b+1)z-c] \sum_{k=0}^{\infty} k c_k z^{k-1} + ab \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = 0.$$

Koeficient pred z^k je

$$k(k-1)c_k - (k+1)kc_{k+1} + k(a+b+1)c_k - (k+1)cc_{k+1} + abc_k.$$

Ko ga izenačimo z 0, dobimo rekurzivno formulo, če privzamemo, da $c \notin (-\mathbb{N})$,

$$c_{k+1} = \frac{k(a+b+k)+ab}{(k+1)(k+c)} c_k = \frac{(a+k)(b+k)}{(k+1)(c+k)} c_k.$$

Izberimo $c_0 = 1$, da dobimo

$$c_1 = \frac{ab}{1 \cdot c}, \quad c_2 = \frac{a(a+1)b(b+1)}{1 \cdot 2 \cdot c(c+1)}, \quad \dots, \quad c_k = \frac{(a)_k(b)_k}{k!(c)_k},$$

kjer pomeni

$$(a)_k := a(a+1) \cdots (a+k-1) = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}.$$

Tako dobimo rešitev

$$y = F(a, b, c; z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k(b)_k}{k!(c)_k} z^k,$$

ki jo imenujemo *hipergeometrijska funkcija*. Po osnovnem izreku 5.7.3 mora biti konvergenčni polmer te vrste enak 1, kar je mogoče potrditi tudi s kvocientnim kriterijem.

Hipergeometrijska funkcija s parametri $a = 1$ in $c = b$ je

$$F(1, b, b; z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \quad (|z| < 1),$$

torej običajna geometrijska vrsta. Kadar je a ali pa b negativno celo število, je hipergeometrijska funkcija polinom. Mnoge znane funkcije je mogoče izraziti s hipergeometrijsko. Na tem mestu si oglejmo le en primer, še nekaj pa jih bo v nalogah.

ZGLED 5.10.7. Vrsto za $\arcsin z$ lahko dobimo z integriranjem iz binomske vrste za $(1-t^2)^{-1/2}$, torej

$$\begin{aligned} \arcsin z &= \int_0^z (1-t^2)^{-1/2} dt \\ &= \int_0^z \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{-\frac{1}{2}}{k} z^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-k+1)}{k!} z^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})_k}{(2k+1)k!} z^{2k+1}. \end{aligned}$$

Po drugi strani pa je

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; z^2\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})_k (\frac{1}{2})_k}{k! (\frac{3}{2})_k} z^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} (\frac{1}{2})_k}{k! (\frac{3}{2} + k - 1)} z^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})_k}{k! (2k+1)} z^{2k}.$$

Od tod lahko zaključimo, da je

$$\arcsin z = z F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; z^2\right).$$

Ker je drugi karakteristični eksponent hipergeometrijske enačbe v točki 0 enak $1-c$, bi lahko drugo rešitev v okolici točke 0 iskali z nastavkom $y = z^{1-c} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, če $1-c$ ni celo število. Vendar pa obstaja še druga pot. Če namreč v enačbo (5.10.10) vpeljemo novo neznanko u prek zveze $y = uz^{1-c}$, potem sledi po krajšem računu, da u zadošča enačbi

$$z(z-1)u'' + [((a-c+1) + (b-c+1) + 1)z - (2-c)]u' + (a-c+1)(b-c+1)u = 0.$$

To je spet hipergeometrijska enačba, katere ena rešitev je $u = F(a-c+1, b-c+1, 2-c; z)$. Torej je

$$y = z^{1-c} F(a-c+1, b-c+1, 2-c; z)$$

rešitev enačbe (5.10.10), ki je očitno linearno neodvisna od rešitve $F(a, b, c; z)$, kadar $c \notin \mathbb{Z}$ (zaradi faktorja z^{1-c} , katerega eksponent $1-c$ ni naravno število).

Naloge

1. Napišite vse homogene linearne diferencialne enačbe drugega reda, ki imajo le dve pravilni singularni točki, in sicer 1 in ∞ , nobene nepravilne singularne točke, determinanta Wronskega poljubnih dveh rešitev pa je konstantna.
2. Napišite homogeno linearno diferencialno enačbo drugega reda, ki ima pravilne singularne točke v 0, 1 in ∞ , nobene nepravilne singularne točke, karakteristična eksponenta v 0 sta 0 in $\frac{1}{2}$, v 1 sta 0 in $-\frac{1}{2}$, v ∞ pa je en eksponent $\frac{1}{2}$. Koliko je drugi eksponent v ∞ ? Napišite tudi dve linearno neodvisni rešitvi v okolici točke 0.
3. Dokažite naslednje identitete za $|z| < 1$:

$$(i) \quad (1+z)^r = F(-r, b, b; -z);$$

$$(ii) \quad \ln(1+z) = zF(1, 1, 2; -z);$$

$$(iii) \quad \arctg z = zF(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; -z^2);$$

$$(iv) \quad e^z = \lim_{b \rightarrow \infty} F(a, b, a; \frac{z}{b}).$$

4. Z vpeljavo nove spremenljivke $\zeta = 1 - z$ prevedite hipergeometrijsko enačbo (5.10.10) v

$$\zeta(\zeta - 1) \frac{d^2 y}{d\zeta^2} + [(a + b + 1)\zeta - (a + b - c + 1)] \frac{dy}{d\zeta} + aby = 0$$

in sklepajte od tod, da sta funkciji $F(a, b, a + b - c + 1; 1 - z)$ in $(1 - z)^{c-a-b} F(c - b, c - a, c - a - b + 1; 1 - z)$ rešitvi enačbe (5.10.10) v okolici točke $z = 1$.

5. Izrazite s pomočjo hipergeometrijske funkcije rešitve hipergeometrijske enačbe (5.10.10) v okolici točke ∞ .
6. Pokažite, da lahko vsako enačbo oblike

$$(z - a)(z - b)y'' + (c + dz)y' + ey = 0,$$

kjer so a, b, c, d, e konstante in $a \neq b$, prevedemo na hipergeometrijsko. (Namig: vpeljite novo spremenljivko $\zeta = \frac{z-a}{b-a}$.)

7. Prevedite Legendreovo enačbo $(z^2 - 1)y'' + 2zy' - n(n + 1)y = 0$ na hipergeometrijsko in sklepajte, da lahko eno rešitev Legendreove enačbe izrazimo kot $y_1 = F(-n, n + 1, 1; \frac{1}{2}(1 - z))$.
8. Dokažite zvezo

$$\int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-zt)^{-a} dt = \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)} F(a, b, c; z) \quad (c > b > 0).$$

(Namig: najprej razvijte izraz $(1 - zt)^{-a}$ v binomsko vrsto.)

9. Prevedite enačbo Čebiševa $(1 - z^2)y'' - zy' + n^2y = 0$ na hipergeometrijsko in izrazite njeno splošno rešitev v okolici točke $z = 1$ s hipergeometrijsko funkcijo.
10. Izračunajte odvod $\frac{d}{dz}F(a, b, c; z)$ ($c \neq 0$). (Rezultat: $\frac{ab}{c}F(a+1, b+1, c+1; z)$.)
11. Vpeljite v hipergeometrijsko enačbo (5.10.10) novo spremenljivko $\zeta = bz$, da dobite enačbo

$$\zeta \left(\frac{\zeta}{b} - 1 \right) \frac{d^2y}{d\zeta^2} + \left[\frac{a+b+1}{b} \zeta - c \right] \frac{dy}{d\zeta} + ay = 0.$$

Ko pošljemo b proti ∞ , preide ta enačba v *konfluentno hipergeometrijsko enačbo*

$$\zeta \frac{d^2y}{d\zeta^2} + (c - \zeta) \frac{dy}{d\zeta} - ay = 0. \quad (5.10.11)$$

(i) Ali je ∞ pravilna singularna točka enačbe (5.10.11)?

(ii) Pokažite, da je 0 pravilna singularna točka enačbe (5.10.11), da sta v njej karakteristična eksponenta 0 in $1 - c$, rešitev, ki pripada eksponentu 0 in ima v točki 0 vrednost 1, pa *konfluentna hipergeometrijska funkcija*

$$F(a, c; \zeta) := 1 + \frac{a}{c} \zeta + \frac{a(a+1)}{2!c(c+1)} \zeta^2 + \dots + \frac{(a)_k}{k!(c)_k} \zeta^k + \dots,$$

če je $c \neq 0, -1, -2, \dots$

12. Laguerrova enačba $zy'' + (1 - z)y' + ny = 0$ je poseben primer enačbe (5.10.11). Pokažite, da so edine rešitve Laguerrove enačbe, ki so omejene v okolici točke 0, oblike $cF(-n, 1; z)$, kjer je c konstanta. (Namig: trditev 5.7.5.) Nadalje je $F(-n, 1; z)$ Laguerrov polinom $L_n(z) = \frac{e^z}{n!} \frac{d^n}{dz^n}(z^n e^{-z})$, če je n naravno število. (Namig: izračunajte $L_n(0)$.)

Literatura

- [1] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*, Third Edition, McGraw-Hill, New York, 1979.
- [2] G. Allann, *Introduction to Banach Spaces and Algebras*, Oxford University Press, Oxford, 2011.
- [3] V. I. Arnold, *Ordinary Differential Equations*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [4] G. Birkhoff in G-C. Rota, *Ordinary Differential Equations*, Fourth Edition, Wiley, New York, 1989.
- [5] F. Bowman, *Introduction to Bessel Functions*, Dover Publications, New York, 1958.
- [6] M. Braun, *Differential Equations and Their Applications*, Fourth Edition, TAM, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [7] J. C. Burkill in H. Burkill, *A Second Course in Mathematical Analysis*, Cambridge Math. Library, Cambridge, 2002.
- [8] R. Courant in D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. I, Interscience Publishers, New York, 1953.
- [9] A. Deitmar, *A First Course in Harmonic Analysis*, Second Edition, Springer-Verlag, New York, 2005.
- [10] M. Dobovišek, *Riemannov in Lebesgueov integral v $\mathbb{R}^n$* , Izbrana poglavja iz matematike in računalništva **36**, DMFA – založništvo, Ljubljana, 1997.
- [11] M. Dobovišek, *Nekaj o diferencialnih enačbah*, Izbrana poglavja iz matematike in računalništva **47**, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2011.
- [12] M. Dobovišek, *Matematika 2*, Izbrana poglavja iz matematike in računalništva **48**, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2013.
- [13] G. B. Folland, *Fourier Analysis and its Applications*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.
- [14] G. B. Folland, *Introduction to Partial Differential Equations*, Second Edition, Princeton University Press, Princeton, 1995.
- [15] J. Globevnik in M. Brojan, *Analiza 2*, Matematični rokopisi, DMFA, Ljubljana, 2010. <http://www.fmf.uni-lj.si/~globevnik/skriptaII.pdf>

-
- [16] M. A. Al-Gwaiz, *Sturm-Liouville Theory and its Applications*, Springer-Verlag, London, 2008.
- [17] P. R. Halmos, *Naive Set Theory*, Springer-Verlag, New York, 1974.
- [18] P. R. Halmos, *A Hilbert Space Problem Book*, GTM **19**, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [19] A. W. Knap, *Basic Real Analysis*, Cornerstones, Birkhäuser, Basel, 2005.
- [20] J. Korevaar, *On Newman's quick way to the prime number theorem*, Math. Intell. **4** (1982), 108–115.
- [21] Y. Kosmann-Schwarzbach, *Groups and Symmetries*, Universitext, Springer, New York, 2010.
- [22] F. Križanič, *Navadne diferencialne enačbe in variacijski račun*, Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1974.
- [23] F. Križanič, *Linearna algebra in linearna analiza*, Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1993.
- [24] S. Lang, *Complex Analysis*, Fourth Edition, GTM, Springer-Verlag, New York, 2003.
- [25] N. N. Lebedev, *Special Functions and their Applications*, Prentice-Hall, Englewood, 1965.
- [26] B. Magajna, *Linearna algebra, metrični prostor in funkcije več spremenljivk*, Matematika-fizika **50**, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2011.
- [27] B. Magajna, *Osnove teorije mere*, Podiplomski seminar iz matematike **27**, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2011.
- [28] J. Mrčun, *Topologija*, Izbrana poglavja iz matematike in računalništva **44**, DMFA Slovenije, Ljubljana, 2008.
- [29] D. J. Newman, *Simple analytic proof of the prime number theorem*, Amer. Math. Monthly **87** (1980), 693–696.
- [30] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, Third Edition, McGraw-Hill, New York, 1987.
- [31] G. F. Simmons, *Differential Equations with Applications and Historical Notes*, Third Edition, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2016.
- [32] A. Suhadolc, *Robni problemi za linearne diferencialne enačbe 2. reda*, Matematični rokopisi **19**, DMFA, Ljubljana, 1990.
- [33] A. Suhadolc, *Potencialna teorija*, Izbrana poglavja iz matematike in računalništva **31**, DMFA Slovenije, Ljubljana, 1994.

-
- [34] A. Suhadolc, *Navadne diferencialne enačbe*, Izbrana poglavja iz matematike in računalništva **34**, DMFA Slovenije, Ljubljana, 1996.
 - [35] A. Suhadolc, *Metrični prostor, Hilbertov prostor, Fourierova analiza, Laplaceova transformacija*, Matematični rokopisi **23**, DMFA, Ljubljana, 1998.
 - [36] S. Širca in M. Horvat, *Računske metode za fizike*, Matematika-fizika **46**, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2011.
 - [37] E. C. Titchmarsh, *Eigenfunction Expansions Associated with Second-order Differential Equations*, Part I, Second Edition, Oxford Univ. Press, 1962.
 - [38] I. Vidav, *Višja matematika I*, Matematika-fizika **6**, DMFA Slovenije, Ljubljana, 2008.
 - [39] Z. X. Wang in D. R. Guo, *Special Functions*, World Scientific, Singapore, 2010.
 - [40] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge Math. Library Edition, Cambridge, 1996.
 - [41] D. Zagier, *Newman's Short Proof of the Prime Number Theorem*, American Math. Monthly, **104** (1997), 705–708.
 - [42] E. Zakrajšek, *Analiza 3*, Matematični rokopisi **21**, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2002.

Stvarno kazalo

A

Abelov problem o tautohroni, 232
absolutno konvergenten produkt, 136
Airyjeva enačba, 271
amplituda, 39
asteroida, 23
atraktor, 107
avtonomni sistem, 68

B

Bergmanov prostor, 184
Bernoullijeva enačba, 16
Bernoullijeva števila, 143
Besselova enačba, 42, 292, 296
Besselova funkcija J_0 , 225
Besselova neenakost, 177
Besselove funkcije, 297
Besselove funkcije druge vrste, 299
biholomorfizem, 122, 133
bistvena singularna točka, 103
bistvena singularna točka ∞ , 104

C

Casorati-Weierstrassov izrek, 103
Cauchy-Greenov izrek za pravokotnik, 91
Cauchy-Greenova formula za pravokotnik, 93
Cauchy-Riemannovi enakosti, 80
Cauchyeva formula za kolobar, 98
Cauchyeva formula za krog, 98
Cauchyeva naloga za valovno enačbo, 246
Cauchyeva ocena za odvod, 98
Cauchyovo zaporedje vektorjev, 171
Caylejeva transformacija, 135
Cezarove delne vsote, 193
cikel, 97
Clairotova enačba, 24

D

d'Alembertova formula, 245
determinanta Wronskega, 26, 57
diferencialna enačba, 13
Diracova »funkcija« δ , 229
Dirichletov problem, 164
Dirichletov problem za kroglo, 288
Dirichletov problem za polprostor, 226

Dirichletov problem za valj, 315
Dirichletova naloga za krog, 157
Dirichletovo jedro, 188
diskriminantna množica, 25
določilna enačba, 293
domena toka vektorskega polja, 69
dušeno nihanje, 39
dvorazmerje, 106

E

ekstremna točka, 183
enačba z ločljivima spremenljivkama, 13
enačba za prevajanje toplote, 246
enakomerna konvergenca na kompaktnih množicah, 124
enakomerna konvergenca produkta, 138
enakozvezna družina funkcij, 58
enakozvezna na kompaktni množici, 126
enostavna sklenjena pot, 132
enostavno povezana množica, 81
Eulerjeva enačba, 35
Eulerjeva konstanta, 152

F

faza, 39
Fejerjev primer divergentne Fourierove vrste zvezne funkcije, 199
Fejerjevo jedro, 193
formalni adjungirani operator, 251
formalno sebi-adjungiran operator, 251
Fourierova metoda ločitve spremenljivk, 242, 312
Fourierova transformacija v $\mathbb{R}^n$, 222
Fourierova transformiranka, 209
Fourierova vrsta, 186
Fourierovi koeficienti, 176, 186
Frobeniusova metoda, 292
Fuchsova enačba, 320
funkcija B , 147
funkcija Γ , 144
funkcija s kompaktnim nosilcem, 94
funkcije eksponentnega reda, 226

G

Gaussova formula za funkcijo Γ , 154
 Gaussova funkcija, 205
 Gaussova hipergeometrijska enačba, 323
 Gaussovo jedro, 223
 generirajoča funkcija Besselovih funkcij, 301
 generirajoča funkcija Laguerrovih polinomov, 288
 generirajoča funkcija Legendreovih polinomov, 275
 generirajoča funkcija polinomov Čebiševa, 286
 generirajoča funkcija za Hermiteove polinome, 283
 Gibbsov pojav, 197
 gladka funkcija, 95, 201
 glavni del Laurentove vrste, 102
 glavni del $v \infty$, 104
 globalni tok vektorskega polja, 69
 Greenova funkcija, 255
 Greenova funkcija za dif. enačbo 2. reda, 267
 Greenova funkcija za Dirichletov problem, 164
 Greenove identitete, 162

H

Hadamardov izrek o treh premicah, 124
 Hanklovi funkciji, 305
 harmonična funkcija, 81
 harmonična funkcija v $\mathbb{R}^3$, 161
 harmonični oscilator v kvantni mehaniki, 284
 Hermiteovi polinomi, 282
 Hilbertov prostor, 171
 hipergeometrijska enačba, 292
 hipergeometrijska funkcija, 323
 holomorfna funkcija, 74
 homogen polinom, 167
 homogen sistem linearnih diferencialnih enačb, 44
 homogena linearna diferencialna enačba 1. reda, 15
 homogena linearna enačba, 25
 homotopni krivulji, 130
 homotopni sklenjeni krivulji, 130

I

indeks, 87
 indeks zvezne sklenjene krivulje, 130
 integral kompleksne funkcije, 82
 integralni sinus, 235
 integrirajoči množitelj, 17
 inverzija, 106
 izjemna točka za diferencialno enačbo 1. reda, 25
 izolirana singularna točka, 103
 izolirana singularna točka ∞ , 104

izrek Arzela-Ascoli, 58
 izrek Čebiševa, 220
 izrek o povprečju za harmonične funkcije, 156, 163
 izrek o residuih, 110

K

karakteristični eksponent diferencialne enačbe, 293
 kemijska reakcija drugega reda, 19
 Kirchhoffova formula, 248
 končna točka poti, 73
 konfluentna hipergeometrijska enačba, 326
 konfluentna hipergeometrijska funkcija, 326
 konformna preslikava, 76
 konveksna množica, 86, 173
 konvergenčni polmer vrste, 75
 konvergenten produkt, 136
 konvergentno zaporedje vektorjev, 171
 konvolucija na $\mathbb{R}$, 201
 konvolucija na $\mathbb{R}^n$, 222
 krivulja, 128
 krivuljni integral kompleksne funkcije, 83

L

$L^1(\mathbb{R})$, 221
 $L^2(\mathbb{R}^n)$, 221
 $L^2(a, b)$, 173
 $L_w^2(a, b)$, 173
 ℓ^2 , 171
 Lagrangeova enačba, 24
 Laguerrovi polinomi, 287
 Laplaceov operator, 81, 242
 Laplaceova transformiranka, 226
 lastna funkcija diferencialnega operatorja, 252
 lastna vrednost diferencialnega operatorja, 252
 Laurentov razvoj, 101
 Laurentov razvoj okrog ∞ , 104
 Lebesgueov izrek o dominirani konvergenci, 169
 Legendreova enačba, 272
 Legendreovi polinomi, 274
 limita zaporedja vektorjev, 171
 linearna diferencialna enačba 1. reda, 15
 linearna diferencialna enačba 2. reda, 25
 linearni diferencialni operator drugega reda, 250
 Liouvillov izrek, 99
 Liouvillova formula, 26, 57
 Liouvillova normalna oblika, 254
 Lipschitzov pogoj, 51
 Lipschitzov pogoj v točki x , 190
 ločena robna pogoja, 252
 logaritem, 108
 lokalni tok vektorskega polja, 69
 Lotka-Volterrov model, 47

M

maksimalna tokovnica, 69
 Mellinova transformacija, 115
 meromorfna funkcija, 105
 Mittag-Lefflerjev izrek, 144
 modificirana Besselova enačba, 314
 modificirane Besselove funkcije, 314
 Morerov izrek, 99

N

napolnitev prostora s skalarnim produktom, 186
 nasprotna pot, 84
 navidezna singularna točka, 103
 ničla reda n v ∞ , 104
 nihajni čas, 39
 nihanje, 39
 norma, porojena iz skalarnega produkta, 170
 normalna oblika homogene linearne
 diferencialne enačbe 2. reda, 41
 normalni odvod, 162
 nosilec funkcije, 94

O

območje, 13, 74
 odpravljava singularna točka, 103
 odprta preslikava, 119
 odsekoma zvezno odvedljiva preslikava, 73
 odvod holomorfne funkcije, 74
 odvod kompleksne funkcije realne
 spremenljivke, 73
 okolice točke ∞ , 74
 omejena na kompaktnih množicah, 126
 ortogonalna množica, 170
 ortogonalna vektorja, množici, 170
 ortogonalne trajektorije, 21
 ortogonalni komplement, 174
 ortogonalni polinomi z utežjo, 278
 ortogonalni z utežjo, 252
 ortonormirana baza, 179
 ortonormirana množica, 170
 osnovna rešitev Laplaceove enačbe v $\mathbb{R}^3$, 161
 osnovni izrek algebre, 99
 ovojnica, 22
 ovojno število, 87
 ovojno število zvezne sklenjene krivulje, 130

P

paralelogramska identiteta, 170
 Peanov eksistenčni izrek, 59
 perioda funkcije, 186
 Phragmen-Lindelöfov izrek, 123
 Picardov izrek o eksistenci in enoličnosti za
 sisteme diferencialnih enačb, 52

Picardovi približki, 56
 Plancherelov izrek, 216, 224
 po točkah omejena družina funkcij, 58
 podvojitvena formula za funkcijo Γ , 151
 Poissonova formula v $\mathbb{R}^3$, 164
 Poissonova formula za krog, 156
 Poissonova sumacijska formula, 217
 Poissonovo jedro, 155
 Poissonovo jedro v $\mathbb{R}^3$, 164
 Poissonovo jedro za polprostor, 226
 pol ∞ , 104
 pol stopnje (reda) n , 103
 polarizacijska identiteta, 170
 polinomi Čebiševa, 285
 polje smeri, 49
 poln ortonormiran sistem, 179
 polno vektorsko polje, 70
 pot, 73
 potenca s kompleksnim eksponentom, 109
 potencial električnega dipola, 281
 povezana množica, 73
 praštevilski izrek, 236
 pravilna singularna točka, 291
 pravilna singularna točka ∞ , 320
 premostljiva singularna točka, 103
 premostljiva singularna točka ∞ , 104
 preslikava razreda C^1 , 73
 pridružene Legendreove funkcije, 278
 princip maksima in minima, 164
 princip maksima za harmonične funkcije, 157
 princip maksima za holomorfne funkcije, 121
 prvi integral avtonomnega sistema, 71

R

razdalja, 170
 razteg, 106
 razvejišče, 109
 realno-diferenciabilna funkcija, 89
 red enačbe, 13
 red ničle, 102
 regularna točka, 291
 regularni del Laurentove vrste, 102
 regularni del v ∞ , 104
 regularni Sturm-Liouvillov problem, 253
 rekurzivna formula za Hermiteove polinome, 283
 rekurzivna formula za koeficiente, 293
 rekurzivna formula za Laguerrove polinome, 288
 relativno kompaktna množica, 126
 residuum, 110
 resonanca, 39
 Riccatijeva enačba, 22
 Riemann-Lebesgueova lema, 213
 Riemannov izrek o konformni ekvivalentnosti,
 134
 Riemannova enačba, 322
 Riemannova funkcija ζ , 144

Riemannova hipoteza, 218
Riemannova sfera, 74
Rieszov izrek, 175
Rodriguesova formula za Legendreove polinome,
274
Rouchejev izrek, 132

S

s potmi povezana množica, 73
Schwartzov prostor, 205, 222
separabilen Hilbertov prostor, 179
sferične harmonije, 290
sferično povprečje, 246
sistem linearnih diferencialnih enačb, 44
skalarni produkt, 169
sklenjena krivulja, 128
sklenjena pot, 84
stereografska projekcija, 74
Stirlingova formula, 149
stopnja ničle, 102
Sturm-Liouvillov izrek, 253
Sturm-Liouvillov problem, 250
Sturmov primerjalni kriterij, 41

Š

šibka konvergenca v Hilbertovem prostoru, 182

T

tokovnica, 49
toplotna enačba, 224
toplotno jedro, 225
translacija, 106
translacija funkcije, 201
trigonometrijski sistem, 181

U

ulomljena linearna transformacija, 105
utež, 252

V

v kompleksnem smislu odvedljiva funkcija, 74
variacija konstant, 31
variacija konstante, 15
variacijska enačba, 62
vektorsko polje, 49, 68
vrsta Θ , 217
vsiljeno nihanje, 39
vsota poti, 84

W

Wallisova formula, 149
Webrova funkcija, 299
Weierstrassov aproksimacijski izrek, 205
Weierstrassov izrek o obstoju holomorfnih
funkcij z danimi ničlami, 139
Weierstrassov produkt, 140
Weierstrassova formula za funkcijo Γ , 154

Z

začetna točka poti, 73
zasuk, 106
zvezno odvedljiva preslikava, 73