

Domača naloga : 10

14. decembra 2016

1. Dokaži, da umeritvena transformacija Lagrangeeve funkcije $L \mapsto L + \frac{dF}{dt}$ porodi kanonsko transformacijo faznega prostora.
2. Dana je transformacija

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{\sqrt{m\omega}} (f(P_1) \sin Q_1 + P_2), \\p_x &= \frac{\sqrt{m\omega}}{2} (f(P_1) \cos Q_1 - Q_2), \\y &= \frac{1}{\sqrt{m\omega}} (f(P_1) \cos Q_1 + Q_2), \\p_y &= \frac{\sqrt{m\omega}}{2} (-f(P_1) \sin Q_1 + P_2).\end{aligned}$$

- (i) Določi funkcijo $f(P)$ tako, da bo preslikava kanonska.
 - (ii) Zapiši Hamiltonovo funkcijo za gibanje naboja v konstantnem magnetnem polju v smeri normale na ravnino xy v novih koordinatah.
 - (iii) Reši dobljeni kanonski sistem in rešitev izrazi s prvotnimi koordinatami.
3. Dana je kompleksna funkcija

$$z = \frac{m\omega x + ip}{\sqrt{2m\omega}} e^{i\omega t}.$$

- (i) Izračunaj Poissonov oklepaj $[z, z^*]$.
 - (ii) Zapiši Hamiltonovo funkcijo harmoničnega oscilatorja $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$ s spremenljivkama z in z^* .
 - (iii) Ali je tako dobljena funkcija Hamiltonova funkcija harmoničnega oscilatorja v koordinatah z in z^* ? Nasvet: reši pripadajoči kanonski sistem.
4. Naj bo $\hat{\mathbf{J}}$ poševno simetrična matrika reda $2n \times 2n$ za katero je $\hat{\mathbf{J}}^2 = -\mathbf{I}$. Definirajmo: družina difeomorfizmov $\mathbf{x} \mapsto \xi = \xi(\mathbf{x}, t)$ je $\hat{\mathbf{J}}$ -kanonska preslikava, če velja

$$\frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{J} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{x}} \right)^T = \hat{\mathbf{J}}.$$

- (i) Ali lahko preslikavo podaljšamo do prave kanonske transformacije?
- (ii) Kaj velja za Poissonov oklepaj?
- (iii) V kakšnem smislu $\hat{\mathbf{J}}$ -kanonska preslikava ohranja kanonske enačbe?
- (iv) Ali je ta ohranitev ekvivalentna definiciji $\hat{\mathbf{J}}$ -kanonske preslikave?