4. domača naloga

26. oktobra 2016

1. Naj bo $\mathbf{h}^s : \mathbf{q} \mapsto \mathbf{h}^s(\mathbf{q})$ družina difeomorfizmov, ki je odvedljiva v okolici $s = 0$ in naj velja $\mathbf{h}^{s=0} = \mathrm{id}$.

   (i) Dokaži, da velja
   $$\left(\frac{\partial \mathbf{h}^s}{\partial \mathbf{q}}\right)_{s=0} = \underline{\underline{1}}. \tag{1}$$

   (ii) Posploši izrek Emmy Noether na primer, ko je funkcija $L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \frac{dF}{dt}(t, \mathbf{q})$ invariantna za zgoraj dano družino difeomorfizmov.

2. Dokaži, da je

   (i) $V_0 = -m\left(\vec{v}_0 \cdot \dot{P} + \vec{v}_0 \cdot (\vec{\omega} \times (P - P_0))\right)$ posplošen potencial inercijske sile;

   (ii) $V_{\mathrm{ce}} = -\frac{1}{2}m(|\vec{\omega} \times (P - P_0)\,|^2$ potencial centrifugalne sile;

   (iii) $V_{\mathrm{co}} = -m\dot{P} \cdot (\vec{\omega} \times (P - P_0))$ posplošen potencial vsote inercijske sile rotacije in Coriolisove sile.

3. Materialna točka se giblje po gladkem rotacijskem elipsoidu pod vplivom teže, ki deluje v smeri simetrijske osi.

   (i) Zapiši pripadajočo Lagrangeevo funkcijo in poišči konstante gibanja.

   (ii) Reduciraj gibanje na premočrtno gibanje.

   (iii) Naj bo sedaj elipsoid sfera, njen polmer pa dana funkcija časa. Zapiši konstanto gibanja in pripadajočo Jacobijevo energijsko funkcijo. Ali je konstanta gibanja?

4. Materialni točki P_1 z maso m_1 in P_2 z maso m_2 se gibljeta v prostoru pod vplivom medsebojne sile gravitacije (problem dveh teles).

   (i) Z uporabo kartezičnih koordinat zapiši pripadajoče Lagrangeeve enačbe. Poišči difeomorfizme, ki ohranjajo Lagrangeevo funkcijo in s pomočjo izreka Emmy Noether pripadajoče konstante gibanja.

   (ii) Sedaj izberi nove koordinate, da bo čim več koordinat cikličnih. Zapiši pripadajoče konstante.