

7. domača naloga

23. novembra 2016

1. Dokaži, da so lastne frekvence invariantne za časovno neodvisne difeomorfizme koordinat. Nato na primeru zaporedne vezave treh vzmeti in dveh mas med stenama izračunaj lastne frekvence in osnovne načine gibanja za dva izbora koordinat; enkrat naj bosta koordinati odmika od ravnovesne lege, drugič pa masno središče in medsebojna razdalja med masama. Kaj lahko poveš, če je difeomorfizem med koordinatami časovno odvisen?
2. Simbol x^i_α je kontravarianten v prostorskem indeksu i in kovarianten v ploskovnem α . Njegov ploskovni kontravariantni odvod po u^β je definiran z

$$x^i_{\alpha;\beta} = \frac{\partial x^i_\alpha}{\partial u^\beta} + \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} x^j_\alpha x^k_\beta - x^i_\gamma \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\}.$$

- (i) Dokaži, da je $x^i_{\alpha;\beta}$ pravokoten na tangentno ravnino.
 - (ii) Označimo z n^i komponente normale na ploskev in definirajmo formo $b_{\alpha\beta}$ s predpisom $x^i_{\alpha;\beta} = b_{\alpha\beta} n^i$. Formi $b_{\alpha\beta}$ pravimo druga fundamentalna forma. Izračunaj drugo fundamentalno formo sfere.
3. Dokaži, da je Hamiltonov variacijski princip invarianten za časovno transformacijo $t = t(\tau)$.
 4. Za Lagrangeevo funkcijo $L = \dot{x}^2 - x^2$ z robnima pogojsma $x(0) = 0$ in $x(T) = 1$ določi največji T pri katerem je stacionarna trajektorija minimum akcije. Nasvet: poišči najboljšo Soboljevo konstanto, to je najmanjša konstanta C tako, da je

$$\int_0^T x^2 dt \leq C^2 \int_0^T \dot{x}^2 dt.$$

Iskanje najboljše Soboljeve konstante prevedi na variacijski nalogo z vezjo.