9. domača naloga

7. decembra 2016

1. Zapišimo stolpca $\mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ v obliki $\mathbf{q} = (\mathbf{q}', \mathbf{q}'')^T$ in $\mathbf{p} = (\mathbf{p}', \mathbf{p}'')^T$, kjer sta vrstici $\mathbf{q}', \mathbf{p}'$ doložine n', $\mathbf{q}'', \mathbf{p}''$ pa vrstici dolžine n'' ter $n' + n'' = n$.

   (i) Izračunaj $[f(\mathbf{q}, \mathbf{p}), H(g_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}), g_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \ldots, g_m(\mathbf{q}, \mathbf{p})]$.

   (ii) Izračunaj $[f(\mathbf{q}', \mathbf{p}'), H(g(\mathbf{q}', \mathbf{p}'), \mathbf{q}'', \mathbf{p}')]$.

   (iii) Za dinamični sistem s Hamiltonovo funkcijo oblike $H = H(g(\mathbf{q}', \mathbf{p}'), \mathbf{q}'', \mathbf{p}')$ poišči konstanto gibanja.

   (iv) Poišči konkretni primer, da bo Hamiltonova funkcija imela obliko predhodne točke.

2. Na faznem prostoru dimenzije $2n$ so definirane n-terice $\mathbf{f} = (\mathbf{p} \otimes \mathbf{a})\mathbf{q}$, $\mathbf{g} = (\mathbf{q} \otimes \mathbf{b})\mathbf{p}$ in $\mathbf{h} = \mathbf{f} + \mathbf{g}$, kjer sta $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$ konstantni n-terici.

   (i) Pokaži, da je $[\mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{F}(\mathbf{x})]$ poševno simetričen tenzor za poljubno funkcijo $\mathbf{F}(\mathbf{x})$.

   (ii) Izračunaj $[\mathbf{f}, \mathbf{f}]$ in $[\mathbf{g}, \mathbf{g}]$. Za primer $n = 3$ poišči pripadajoča osna vektorja.

   (iii) Izračunaj $[\mathbf{h}, \mathbf{h}]$.

3. Materialna točka z maso m se giblje v polju centralne sile $\vec{F} = -\frac{mk}{r^3}\vec{r}$, $k > 0$.

   (i) Dokaži, da je Laplace Lenzov vektor $\vec{A} = m\vec{v} \times \vec{l} - m^2 k \frac{1}{r}\vec{r}$ konstanta gibanja. Tu je $\vec{l}$ vektor vrtilne količine.

   (ii) Izračunaj Poissonov oklepaj $[\vec{A}, \vec{A}]$.

   (iii) Izračunaj tudi $[\vec{A}, \vec{l}]$.

4. Na prostoru gladkih funkcij definiranih na $\mathbb{R}^3$ definiramo za poljubni funkciji $f = f(\vec{l})$ in $g = g(\vec{l})$ oklepaj

$$\{f, q\}(\vec{l}) = -\vec{l} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} \times \frac{\partial g}{\partial \vec{l}} \right).$$

   (i) Dokaži, da ima tako definiran oklepaj vse lastnosti Poissonovega oklepaja.

   (ii) Dokaži, da so Eulerjeve dinamične enačbe za prosto togo telo ekvivalentne enačbi $\dot{f} = \{f, H\}$, kjer je H kinetična energija togega telesa.

   (iii) Dokaži, da kvadrat velikosti vrtilne količine $l = \vec{l} \cdot \vec{l}$ komutira v oklepaju s poljubno funkcijo $g = g(\vec{l})$. Kaj to pomeni?