ANALITIČNA MEHANIKA - sinopsis 2016/2017

LAGRANGEEVA MEHANIKA

5.10.16 **Literatura**

- Jose, Jorge V. in Saletan, Eugene, *Classical Dynamics : a contemporary approach*, Cambridge University Press, 1998, 48-62.
- Goldstein, H., *Classical Mechanics* , 2nd ed., Addison-Wesley, reading, Mass., 1980, 12-16.
- Lanczos, C., *The Variational Principles of Mechanics* , 4nd ed., Dover, 1986, 3-27.

Primer za motivacijo: dvojno matematično nihalo:
a) izpeljava gibalnih enačb s pomočjo vektorske mehanike;
b) izpeljava gibalnih enačb z Lagrangeevo mehaniko.
Generalizirane koordinate, konfiguracijski prostor; pisava $\mathbf{q} = (q^1, q^2, \ldots, q^n) \in \mathbb{R}^n$.
Vezi: geometrijske vezi, vezi prvega reda, vezi p-tega reda.
Omejitev na geometrijske vezi in kvazilinearne vezi prvega reda :

$$\mathbf{a}(\mathbf{q}, t) \cdot \dot{\mathbf{q}} + a_0(\mathbf{q}, t) = 0.$$

Pisava $\tilde{\mathbf{q}} = (t, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\tilde{\mathbf{a}} = (a_0, \mathbf{a}) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
Integrabilnost vezi prvega reda.
Trditev Če je vez $\tilde{\mathbf{a}} \cdot \tilde{\mathbf{q}} = 0$ integrabilna, potem obstaja funkcija(integrirajoči množitelj) $\lambda(\tilde{\mathbf{q}})$ tako, da velja

$$\frac{\partial \lambda a_k}{\partial q^l} = \frac{\partial \lambda a_l}{\partial q^k}, \quad k, l \in \{0, 1, \ldots, N\}.$$

Primer:
a) kotaljeneje diska po premici;
b) kotaljeneje diska po ravnini.
Zapis vezi $\tilde{\mathbf{a}} \cdot \tilde{\mathbf{q}}$ s formo $\omega = a_k dq^k$.
Izrek (Frobenius) Sistem m form $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{q}}) d\tilde{\mathbf{q}}$ nad $\mathbb{R}^{n+1}$, definiran na okolici točke $\tilde{\mathbf{q}}_0$, kjer je $\mathbf{A}(\tilde{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{m \times (n+1)}$ matrika razreda C^1 in ranga m je integrabilen v okolici $\tilde{\mathbf{q}}_0$ natanko tedaj, ko obstaja okolica U točke $\tilde{\mathbf{q}}_0$ tako, da na U velja kompatibilnostni pogoj

$$d\omega^j \wedge \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^m = 0, \qquad \text{za vsak} \qquad j \in \{1, \ldots, m\}.$$

Primer: kotaljenje diska po ravnini.
Posledica Vez $a_k \dot{q}^k + a_0 = 0$ je integrabilna natanko tedaj, ko obstaja neničelni množitelj $\lambda = \lambda(\mathbf{q}, t)$, tako da je

$$\frac{\partial \lambda a_k}{\partial q^l} = \frac{\partial \lambda a_l}{\partial q^k}, \quad k, l \in \{0, 1, \ldots, N\}, \quad q^0 = t.$$

Klasifikacija vezi: holonomna, neholonomna vez, reonomna, skleronomna, katastatične, akatastatične.
Število prostostnih stopenj je enako razsežnosti konfiguracijskega prostora minus število vezi.
Dejanski pomik(hitrost), možni pomik(hitrost); virtualni pomik(hitrost) je razlika med dejanskim in možnim pomikom.
Sistem vezi

$$\frac{\partial f^i}{\partial q^k} \dot{q}^k = -\frac{\partial f^i}{\partial t},$$
$$a_{jk} \dot{q}^k = -a_j,$$

$i = 1, 2, \ldots, m''$, $j = 1, 2, \ldots, m'$.
Definicija Rešitvi $\dot{\mathbf{q}}$ sistema vezi pravimo možna hitrost. Rešitvi prirejenega homogenega sistema pa virtualna hitrost.