MEHANIKA FLUIDOV - sinopsis predavanj za študente matematike v letu 2015/2016

KINEMATIKA

24.2.16 Pojem kontinuuma.
Referenčni, prostorski položaj.
Pisava P položaj materialne točke $\mathcal{P}$ v referenčni konfiguracji, p položaj točke v prostorski konfiguraciji.
Referenčne koordinate $\mathbf{X} = (X^K)$, prostorske koordinate $\mathbf{x} = (x^k)$, preslikava $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$.
Preslikava $p = p(P, t)$ je difeomorfizem.
Materialni, referenčni(Lagrangeov), prostorski(Eulerjev) opis gibanja.
Vzvrat in prenost, pisava $f^*(P,t) = f(p(P,t),t)$ in $F_*(p,t) = F(P(p,t),t)$.
Trditev $(f^*)_*(p,t) = f(p,t)$ in $(F_*)^*(P,t) = F(P,t)$.
Definicija Materialni odvod prostorske funkcije $f = f(p,t)$ je

$$\frac{Df}{Dt} = \left(\frac{d}{dt} f^*\right)_* .$$

Materialni odvod referenčne funkcije $\vec{F}(P,t)$ je $\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t}$.
Izrek $\frac{Df}{Dt} = \operatorname{grad} f \, \vec{v} + \frac{\partial f}{\partial t}$.
Hitrostno polje: $\vec{V}(P,t) = \frac{\partial p}{\partial t}(P,t)$.
Polje pospeškov: $\vec{A}(P,t) = \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(P,t)$.
Prenos na prostorski položaj: $\vec{v}(p,t) = \vec{V}_*(p,t)$, $\vec{a}(p,t) = \vec{A}_*(p,t)$.
Izrek $\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt}$.
Trditev $(\operatorname{grad} \vec{u})\vec{v} = (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{u}$.
Trditev $\vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \operatorname{grad} \frac{1}{2} |\, \vec{v} \,|^2 + \operatorname{rot} \vec{v} \times \vec{v}$.
Rotor je dvakratnik osnega vektorja poševno simetričnega dela gradienta hitrosti.
Primer: Dano je hitrostno polje : $v^1 = 6t(1+2t)y$, $v^2 = \frac{-2}{1+2t} y$, $v^3 = 5(x - 3t^2(1+2t)y)$. Izračunaj $\vec{a}$ na dva načina
Pisava: $p(t) = \mathcal{F}(p_0, \tau, t)$ je integral sitema navadnih diferencialnih enačb $\frac{dp}{dt} = \vec{v}(p,t)$ z začetnim pogojem $p(t = \tau) = p_0$.
Tirnica materialne točke $\mathcal{P}_0$, ki ima času $t = \tau$ prostorski položaj p_0 je krivulja $p(t) = \mathcal{F}(p_0, \tau, t), t \in I \subset \mathbb{R}$.
Slednica (emisijska črta) v času t_0 skozi prostorski položaj p_0 je krivulja $\pi(\tau) = \mathcal{F}(p_0, \tau, t_0), \tau \in I$.
Tokovnica v času t_0 skozi prostorski položaj p_0 je krivulja, ki gre skozi p_0 in se dotika hitrostnega polja $\vec{v}(p, t_0)$.
Trditev Če je hitrostno polje stacionarno, se tirnice, tokovnice in slednice sovpadajo.
Primer: Dano je hitrostno polje : $v^1 = 6t(1+2t)y$, $v^2 = \frac{-2}{1+2t} y$, $v^3 = 5(x - 3t^2(1+2t)y)$.
a) Določi tirnico, ki gre v času $t = 0$ skozi x_0, y_0, z_0.
b) Določi tokovnico, ki gre skozi točko $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ in $z_0 = 0$ v času $t = 1(t = 0)$.
c) Določi slednico, ki gre skozi točko $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ in $z_0 = 0$ v času $t_0 = 1$.

2.3.16 Tokovna cev, pretok.
Trditev Če je hitrostno polje solenoidalno, je pretok skozi tokovno cev konstanten.
Vrtinčnica, cirkulacija, vrtinčna cev.
Trditev Cirkulacija vzdolž vrtinčne cevi je konstantna.
Gradient deformacije $\underline{\underline{F}} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial \vec{P}}$, $J = \det \underline{\underline{F}}$.
Trditev
a) $dp = \underline{\underline{F}} dP$;
b) $d\vec{a} = J \underline{\underline{F}}^{-T} d\vec{A}$.
c) $dv = J dV$;

Definicija $\underline{\underline{L}} = \mathrm{Grad}\,\vec{V} = \dot{\underline{\underline{F}}}$, $\underline{\underline{l}} = \mathrm{grad}\,\vec{v}$.
Tenzor deformacijskih hitrosti $\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{l}} + \underline{\underline{l}}^T)$, vrtinčni tenzor $\underline{\underline{w}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{l}} - \underline{\underline{l}}^T)$.
Trditev $\underline{\underline{L}} = \underline{\underline{l}}^* \, \underline{\underline{F}}$.
Skalarni produkt na prostoru tenzorjev drugega reda $\underline{\underline{a}} : \underline{\underline{b}} = \mathrm{Sl}\,(\underline{\underline{a}}\underline{\underline{b}}^T)$.
Izrek

$$\frac{\partial \det \underline{\underline{a}}}{\partial \underline{\underline{a}}} = (\det \underline{\underline{a}})\underline{\underline{a}}^{-T} = \underline{\underline{a}}^*.$$

Posledica $\frac{DJ}{Dt} = J\mathrm{div}\,\vec{v}$.
Izrek
a) $\frac{D}{Dt}dp = \underline{\underline{l}}\,dp$;
b) $\frac{D}{Dt}d\vec{a} = (\mathrm{div}\,\vec{v}\,\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{l}}^T)d\vec{a}$;
c) $\frac{D}{Dt}dv = \mathrm{div}\,\vec{v}\,dv$.
Transportni izreki
Pisava: $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{C}$ materialni volumen, ploskev, krivulja telesa $\mathcal{B}_0$, B, A, C ustrezni referenčni položaji in $b(t) = \chi(\mathcal{B}, t)$, $a(t) = \chi(\mathcal{A}, t)$, $c(t) = \chi(\mathcal{C}, t)$ pripadajoči prostorski položaji.
Izrek Naj bo $F(P, t)$ skalarna ali tenzorska funkcija definirana na referenčnem položaju B razreda C^1 z omejenimi parcialnimi odvodi in $f(p, t)$ njen pripadajoči prostorski zapis. Potem

a)
$$\frac{D}{Dt}\int_{b(t)} f\,dv = \int_{b(t)} \left(\frac{Df}{Dt} + f\mathrm{div}\,\vec{v}\right)\,dv.$$
b)
$$\frac{D}{Dt}\int_{a(t)} f\,d\vec{a} = \int_{a(t)} \left(\frac{Df}{Dt} + f(\mathrm{div}\,\vec{v}\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{l}}^T)\right)\,d\vec{a}.$$
c)
$$\frac{D}{Dt}\int_{c(t)} f\,ds = \int_{c(t)} \left(\frac{Df}{Dt} + f\vec{t}\cdot\underline{\underline{d}}\,\vec{t}\right)\,ds.$$

Definicija $(\mathrm{div}\,\underline{\underline{t}})\cdot\vec{a} = \mathrm{div}\,(\underline{\underline{t}}^T\vec{a})$.
Izrek (Gauss)

$$\int_b \mathrm{div}\,\underline{\underline{t}}\,dv = \int_{\partial b} \underline{\underline{t}}\vec{n}\,da.$$

9.3.16 **Trditev** $\mathrm{div}\,\vec{u}\otimes\vec{v} = (\mathrm{div}\,\vec{v})\vec{u} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{u}$.
Posledica Naj bo f skalarna ali vektorska funkcija. Potem

$$\frac{D}{Dt}\int_{b(t)} f\,dv = \int_{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}\,dv + \int_{\partial b(t)} f\,\vec{v}\cdot d\vec{a}.$$

Posledica Naj bo f skalarna ali vektorska funkcija z nezveznostjo na materialni ploskvi $a(t) \subset b(t)$. Potem

$$\frac{D}{Dt}\int_{b(t)} f\,dv = \int_{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}\,dv + \int_{\partial b(t)} f\,\vec{v}\cdot d\vec{a} + \int_{a(t)} [|f|]\,\vec{v}\cdot d\vec{a}.$$

FIZIKALNI PRINCIPI MEHANIKE KONTINUUMA
Pojem mase, masa je absolutno zvezna glede na volumen; gostota.
Zakon o ohranitvi mase

$$0 = \frac{\partial m(\mathcal{V})}{\partial t} = \frac{D}{Dt}m(v(t)) = \frac{D}{Dt}\int_{v(t)} \rho\,dv = 0 \qquad \text{za vsak} \quad \mathcal{V}\subset\mathcal{B}.$$

Lokalni zapis v prostorskem položaju:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0.$$

Definicija Gibanje kontinuuma je nestisljivo, če $\frac{D}{Dt}\rho = 0$.
Posledica Gibanje je nestisljivo $\iff$ hitrostno polje je solenoidalno.
Zapis zakona o ohranitvi mase v Lagrangeevem opisu $\rho J = konst$.
Posledica

$$\frac{D}{Dt}\int_{v(t)} \rho f \, dv = \int_{v(t)} \rho \frac{Df}{Dt} \, dv.$$

Klasifikacija sil; volumenske, površinske, točkovne sile.
Cauchyjeva hipoteza, pisava $\vec{t}(p,t;\vec{n})$.
Princip o gibalni količini:

$$\frac{D}{Dt}\int_{b(t)} \rho \vec{v} \, dv = \int_{b(t)} \rho \vec{f} \, dv + \int_{\partial b(t)} \vec{t} \, da.$$

Princip o vrtilni količini:

$$\frac{D}{Dt}\int_{b(t)} (p-o) \times \rho \vec{v} \, dv = \int_{b(t)} (p-o) \times \rho \vec{f} \, dv + \int_{\partial b(t)} (p-o) \times \vec{t} \, da + \vec{N}.$$

Tu je $\vec{N}$ navor notranjih sil. Sredstvo je nepolarno, če velja $\vec{N} = 0$.
Izrek (Cauchyjeva recipročna relacija) $\vec{t}(p,t;-\vec{n}) = -\vec{t}(p,t;\vec{n})$.
Homogenizacija; definiramo $\vec{t}(p,t;\vec{u}) = |\vec{u}|\vec{t}(p,t;\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|})$.
Izrek $\vec{t}(p,t;\vec{u})$ je homogena funkcija argumenta $\vec{u}$.
Izrek $\vec{t}(p,t;\vec{u})$ je aditivna funkcija argumenta $\vec{u}$.
Izrek Obstaja tenzor $\underline{\underline{t}}$, tenzor napetosti, tako da je $\vec{t}(p,t;\vec{n}) = \underline{\underline{t}}(p,t)\vec{n}$.

16.3.16 Lokalna oblika izreka o gibalni količini; Cauchyjeva momentna enačba

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{f} + \operatorname{div} \underline{\underline{t}} \qquad \text{oziroma} \qquad \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v} \otimes \rho \vec{v}) = \rho \vec{f} + \operatorname{div} \underline{\underline{t}}.$$

Trditev
a) $\underline{\underline{t}} : \underline{\underline{s}} = \underline{\underline{t}}^T : \underline{\underline{s}}^T$;
b) $\underline{\underline{t}} : \underline{\underline{w}} = 0$ za vsak $\underline{\underline{w}} \in \mathrm{Psym}_2 \Longrightarrow \underline{\underline{t}} \in \mathrm{Sym}_2$.
Trditev $\operatorname{div}(\underline{\underline{t}}\vec{u}) = \operatorname{div} \underline{\underline{t}}^T \cdot \vec{u} + \underline{\underline{t}}^T : \operatorname{grad} \vec{u}$.
Lema Naj bo sredstvo nepolarno. Potem za vsako helikiodalno vektorsko polje $\vec{w}$ velja

$$\int_{b(t)} \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} \cdot \vec{w} \, dv = \int_{b(t)} \rho \vec{f} \cdot \vec{w} \, dv + \int_{\partial b(t)} \vec{t} \cdot \vec{w} \, da.$$

Izrek Če je sredstvo nepolarno, je tenzor napetosti simetričen.
V nadaljevanju se bomo omejili na nepolarna sredstva.
Lastnosti tenzorja napetosti; normalna, strižna napetost.
Morhove krožnice; smer maksimalne, minimalne normalne napetosti, maksimalne strižne napetosti.
Hidrostatika
Sferični napetostni tenzor $\underline{\underline{t}} = -p\,\underline{\underline{I}}$; hidrostatika, hidrostatika v relativnem koordinatnem sistemu.

23.3.16 Arhimedov zakon, metacenter.
Primer: sila na zapornico.
Hidrostatika v relativnem KS.
Primer: fluid v enakomerno se vrteči posodi.
Energijski principi

Definicija

a) kinetična energija: $\mathcal{T} = \frac{1}{2}\int_{b(t)} \rho\vec{v}\cdot\vec{v}\,dv$;

b) notranja energija: $\mathcal{U} = \int_{b(t)} \rho u\,dv$;

c) moč volumenskih in površinskih sil: $\mathcal{W} = \int_{b(t)} \rho\vec{f}\cdot\vec{v}\,dv + \int_{\partial b(t)} \vec{t}\cdot\vec{v}\,da$;

d) sprememba toplotne energije na enoto časa: $\mathcal{Q} = \int_{b(t)} \rho h\,dv - \int_{\partial b(t)} \vec{q}\cdot d\vec{a}$.

Tu je u specifična notranja energija, h specifična gostota toplotnih vrelcev na enoto časa, $\vec{q}$ pa je toplotni tok na enoto časa.
Prvi zakon termodinamike

$$\frac{D}{Dt}(\mathcal{T}+\mathcal{U}) = \mathcal{W}+\mathcal{Q}.$$

Lokalna oblika

$$\rho\frac{Du}{Dt} = \underline{\underline{d}} : \underline{\underline{t}} - \operatorname{div}\vec{q} + \rho h.$$

30.3.16 Drugi zakon termodinamike

$$\frac{D}{Dt}\int_{b(t)} \rho\eta\,dv \geq \int_{b(t)} \frac{\rho h}{T}\,dv - \int_{\partial b(t)} \frac{1}{T}\vec{q}\cdot\vec{n}\,da.$$

Tu je η specifična entropija, T pa absolutna temperatura.
Lokalna oblika:

$$\rho\frac{D\eta}{Dt} + \operatorname{div}\frac{1}{T}\vec{q} - \frac{\rho h}{T} \geq 0 \qquad \text{oziroma} \qquad \rho\left(T\frac{D\eta}{Dt} - \frac{Du}{Dt}\right) + \underline{\underline{d}} : \underline{\underline{t}} - \frac{1}{T}\vec{q}\cdot\operatorname{grad}T \geq 0.$$

Gibbsova formulacija: termodinamične spremenljivke $1/\rho$-specifični volumen, η, u, p-tlak, T; Enačba stanja $u = u(\eta, 1/\rho)$, $p = -\frac{\partial u}{\partial(1/\rho)}$ in $T = \frac{\partial u}{\partial\eta}$.
Koordinatna neodvisnost - materialna objektivnost
Objektivnost skalarjev, vektorjev in tenzorjev.
Primer: vektor hitrosti ni koordinatno neodvisen, gradient vektorskega polja prav tako ne.
Trditev Vektor napetosti je koordinatno neodvisen.
Trditev Tenzor napetosti in tenzor deformacijskih hitrosti sta koordinatno neodvisna.
Definicija Kontinuum je elastičen, če $\underline{\underline{t}} = \underline{\underline{f}}(\underline{\underline{F}})$.
Izrek Konstitutivna zveza $\underline{\underline{t}} = \underline{\underline{f}}(\underline{\underline{F}})$ je koordinatno neodvisna, če je

$$\underline{\underline{f}}(Q\underline{\underline{F}}) = Q\underline{\underline{f}}(\underline{\underline{F}})Q^T.$$

za vsak $Q \in O(3)$.
Glavne invariante tenzorja $\underline{\underline{a}}$: $I(\underline{\underline{a}}) = \operatorname{Sl}\underline{\underline{a}}$, $II(\underline{\underline{a}})$, $III(\underline{\underline{a}}) = \det\underline{\underline{a}}$.
Trditev Glavne invariante tenzorja so skalarne izotropične funkcije.
Definicija (izotropične funkcije)

a) Funkcija $\psi : \mathrm{Sym}_2 \mapsto \mathbb{R}$ je *izotropična skalarna funkcija*, če za vsak $\underline{\underline{a}} \in \mathrm{Sym}_2$ velja $\psi(Q^T\underline{\underline{a}}Q) = \psi(\underline{\underline{a}})$ za vsak $Q \in SO(3)$.

b) Funkcija $\mathbf{f} : \mathrm{Sym}_2 \mapsto \mathrm{Sym}_2$ je *izotropična tenzorska funkcija*, če za vsak $\underline{\underline{a}} \in \mathrm{Sym}_2$ velja $\mathbf{f}(Q^T\underline{\underline{a}}Q) = Q^T\mathbf{f}(\underline{\underline{a}})Q$ za vsak $Q \in SO(3)$.

Izrek $\psi : \mathrm{Sym}_2 \mapsto \mathbb{R}$ je izotropična skalarna funkcija $\iff$ $\psi(\underline{\underline{a}}) = \psi(I(\underline{\underline{a}}), II(\underline{\underline{a}}), III(\underline{\underline{a}}))$.

6. 4. 16 **Izrek** $\mathbf{f} : \mathrm{Sym}_2 \mapsto \mathrm{Sym}_2$ je izotropična tenzorska funkcija $\iff$ $\mathbf{f}(\underline{\underline{a}}) = \tau_0(\underline{\underline{a}})\underline{\underline{I}} + \tau_1(\underline{\underline{a}})\underline{\underline{a}} + \tau_2(\underline{\underline{a}})\underline{\underline{a}}^2$, kjer so $\tau_i(\underline{\underline{a}})$ izotropične skalarne funkcije.

(Stokes) Razlika med napetostjo v dani točki in smeri ter hidrostatičnim tlakom je odvisna zgolj od neposrednega relativnega deformacijskega gibanja.

Definicija Kontinuum je je Stokesov fluid, če velja $\underline{\underline{t}} = f(\underline{\underline{d}})$, kjer je f zvezna izotropična funkcija tenzorja $\underline{\underline{d}}$ in $f(\underline{\underline{0}}) = -p\underline{\underline{I}}$.

Posledica Če je fluid Stokesov, potem $\underline{\underline{t}} = \alpha\underline{\underline{I}} + \beta\underline{\underline{d}} + \gamma\underline{\underline{d}}^2$, kjer so α, β in γ izotropične skalarne funkcije tenzorja $\underline{\underline{d}}$.

Viskoznostni tenzor $\underline{\underline{V}}$, $\underline{\underline{t}} = -p\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{V}}$.

Trditev $\underline{\underline{V}} : \underline{\underline{d}} \geq 0$.

Newtonov fluid (Cauchy-Poissonov zakon): $\underline{\underline{V}}$ je afina funkcija tenzorja $\underline{\underline{d}}$:

$$\underline{\underline{t}} = (-p + \lambda \mathrm{div}\,\vec{v})\underline{\underline{I}} + 2\mu\underline{\underline{d}}.$$

Trditev Velja $\mu \geq 0$ in $3\lambda + 2\mu \geq 0$.

Trditev V evklidski metriki je $\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,\vec{v})^T = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{v}$.

13. 4. 16 **Definicija** $\Delta\,\vec{v} = \mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,\vec{v})$

Trditev $\mathrm{div}\,(\vec{u} \times \vec{v}) = \mathrm{rot}\,\vec{u} \cdot \vec{v} - \mathrm{rot}\,\vec{v} \cdot \vec{u}$.

Trditev Velja $\Delta\,\vec{v} = \mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,\vec{v})^T - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{v}$.

Navier - Stokesova enačba:

$$\varrho\frac{D\vec{v}}{Dt} = \varrho\vec{f} - \mathrm{grad}\,p + (\lambda + \mu)\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{v} + \mu\Delta\,\vec{v}.$$

Začetni, robni pogoji.

Dimenzija $[\mu] = \frac{kg}{ms}$, kinematična viskoznost ν, tabela tipičnih vrednostih μ, ν. Brezdimenzijski zapis, Froudovo, Eulerjevo, Reynoldsovo število.

Eulerjeva enačba, Stokesova enačba.

Enostavni primeri laminarnega toka

a) Tok med paralelnima ploščama; pretok, sila vleka.

20. 4. 16

b) Poiseuilleov tok: tok skozi cilinder, krožni cilinder; pretok, viskozimeter.

c) Couettov tok; navor vrtenja notranjega oboda, Taylorjevi vrtinci.

d) Nestacionarno gibanje; I. Stokesova naloga-impulzivni začetek gibanja plošče; difuzijska enačba. Variacijska formulacija.

Trditev Rešitev difuzijske enačbe je kvečejmu ena sama.

4. 5. 16 **Trditev** Rešitev difuzijske enačbe je $v(t, y) = g(\frac{y}{\sqrt{t}})$.

Trditev Konstrukcija rešitev $v = U\mathrm{Ercf}(y/(2\sqrt{\nu t}))$.

Grafa v/y, v/t; Grafa vrtinčnega polja $\omega = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\,\vec{v}$, ω/y, ω/t; hitrost difuzije vrtinca.

Enoličnost in stabilnost Navier Stokesovih enačb

Izrek *Izrek o enoličnosti gladke rešitve* Navier Stokesova enačba za fluid s konstantno gostoto s predpisano hitrostjo na robu in začetnim pogojem ima kvečejmu eno gladko rešitev.

11. 5. 16 Reševanje domače naloga za Reiner-Rivlinov fluid med dvema stenama.
Izrek (*Poincarejeva neenakost*) Naj bo Ω omejena množica in $u \in H_0^1(\Omega)$. Potem obstaja pozitivna konstanta $C = C(\Omega)$ tako, da je

$$\|u\|_0 \leq C\|\mathrm{grad}\, u\|.$$

Primer uporabe Poincarejeve neenakosti.
Izrek Naj bo Ω omejena množica in par $(\vec{v}, p)$ rešitev Navier-Stokesov enačb za konstantno gostoto in potencialno gostoto volumenskih sil pri robnem pogoju $\vec{v} = \vec{0}$ na robu in začetnem pogoju $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$. Potem obstaja $\lambda > 0$ tako, da je

$$\|\vec{v}(t)\|_0 \leq \|\vec{v}_0\|_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Turbolentno modeliranje.
Primeri filtrov: časovno povprečenje, prostorsko povprečenje, Fourierov filter, statistični filter.
Željene lastnosti filtrov:
a) linearnost: $< \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} >= \alpha < \vec{u} > +\beta < \vec{v} >$;
b) komutativnost s časovnim odvodom;
c) komutativnost s krajevnim odvodom;

18. 5. 16
c) Idempotenčnost $<< \vec{v} >>=< \vec{v} >$;
d) produktna lastnost $:< \vec{u} < \vec{v} >>=< \vec{u} >< \vec{v} >$.
Filtriranje Navier-Stokesovih enačb.
Reynoldsov turbulentni napetostni tenzor.
$k - \epsilon$ model, turbulentno modeliranje.
Stokesova enačba:

$$\varrho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \varrho\vec{f} - \mathrm{grad}\, p + (\lambda + \mu)\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{v} + \mu\Delta\,\vec{v}.$$

Primer *Stokes 1851*: obtekanje krogle.
Nastavek $\vec{v} = \vec{u} + \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, f(r)\vec{u}$

25. 5. 16 Rešitev biharmonične enačbe za f.
Določitev hitrostnega polja, izračun tlaka.
Izračun sile na kroglo.
IDEALEN FLUID; $\underline{\underline{t}} = -p\underline{\underline{I}}$.
Adiabatični fluid $\frac{D\eta}{Dt} = 0$, prvi zakon termodinamike, dekompozicija toplotnega in mehanskega dela.