Domača naloga : 3

9. marca 2016

1. Označimo $\vec{\omega} = \operatorname{rot} \omega$. Dokaži
$$\operatorname{rot} \frac{D\,\vec{v}}{Dt} = \frac{D}{Dt}\vec{\omega} + (\operatorname{div} \vec{v})\,\vec{\omega} - (\operatorname{grad} \vec{v})\;\vec{\omega}.$$
Nasvet, izračunaj posebej $\operatorname{rot}(\vec{u} \times \vec{v}) = ...$
2. Dano je hitrostno polje
$$v_1 = (\alpha x_1 - \beta x_2)t, \qquad v_2 = \beta x_1 - \alpha x_2, \qquad v_3 = 0,$$
kjer sta α_i in β_i konstanti.
   (i) Določi $\rho = \rho(t)$ tako, da bo veljala kontinuitetna enačba (zakon o ohranitvi mase).
   (ii) Poišči pogoj, da bo fluid nestisljiv.
   (iii) Ali obstaja taka rešitev $\rho = \rho(t, x)$, da bo veljala kontinuitetna enačba?
3. S pomočjo kontinuitetne enačbe dokaži *Beltramijevo vrtinčno enačbo*
$$\rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{\vec{\omega}}{\rho}\right) = \operatorname{rot} \frac{D\,\vec{v}}{Dt} + (\operatorname{grad} \vec{v})\;\vec{\omega},$$
kjer je $\vec{\omega} = \operatorname{rot} \vec{v}$.
4. V prostorskem položaju sta dva opazovalca, (t, p) in (t', p'); $t' = t$ in $p' = p_0'(t) + Q(t)(p - p_0)$. Naj bo dana funkcija $\rho = \rho(p, t)$. Definiramo $\rho'(p', t) = \rho(p_0 + Q^T(p' - p_0'), t)$. Dokaži, da velja
$$\frac{D\,\rho}{Dt} = \frac{D\,\rho'}{Dt}.$$
Interpretiraj enakost, če je ρ gostota nestisljivega fluida.