Domača naloga : 4

16. marca 2016

1. Dan je napetostni tenzor
$$\underline{\underline{t}} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & x_2 + \alpha x_3 & h(x_2, x_3) \\ 0 & h(x_2, x_3) & x_2 + \beta x_3 \end{bmatrix},$$
kjer sta α in β poljubni konstanti.

   (i) Določi funkcijo $h(x_2, x_3)$ tako, da bo $\underline{\underline{t}}$ ravnovesni napetostni tenzor ($\operatorname{div} \underline{\underline{t}} = \vec{0}$).

   (ii) Za ravnino z normalo v smeri vektorja $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ najdi normalno in strižno napetost. V kateri smeri je strižna napetost ekstremalna?

2. Naj $\underline{\underline{t}}$ zadošča statični ravnovesni enačbi
$$\operatorname{div} \underline{\underline{t}} + \rho \vec{f} = \vec{0}$$
in naj na robu območja b velja $\underline{\underline{t}} \cdot \vec{n} = \vec{t}_0$. Izračunaj povprečje napetostnega tenzorja na b. Kaj velja v posebnem primeru $\vec{f} = \vec{t}_0 = \vec{0}$? Nasvet: uporabi formulo za $\operatorname{div}(\underline{\underline{t}}\vec{u})$ za primerno izbran $\vec{u}$.

3. Naj velja princip o gibalni količini in posplošen princip o vrtilni količini (*Coserratov fluid*)
$$\frac{D}{Dt}\int_{b(t)} (p-o) \times \rho\vec{v}\, dv = \int_{b(t)} (p-o) \times \rho\vec{f}\, dv + \int_{\partial b(t)} (p-o) \times \vec{t}\, da + \int_{b(t)} \vec{c}\, dv + \int_{\partial b(t)} \vec{m}(\vec{n})\, da.$$

   (i) Pokaži, da obstaja tenzor $\underline{\underline{m}}$ tako, da je $\vec{m}(\vec{n}) = \underline{\underline{m}}\,\vec{n}$.

   (ii) Pokaži, da je
$$\int_{\partial b} (p-o) \times \underline{\underline{m}}\,\vec{n}\, da = \int_b \left(2\vec{\omega}(\underline{\underline{m}}) + (p-o) \times \operatorname{div} \underline{\underline{m}}\right) dv,$$
kjer je $\vec{\omega}(\underline{\underline{m}})$ osni vektor poševno simetričnega dela tenzorja $\underline{\underline{m}}$.

   (iii) Izpelji ravnovesno enačbo za $\underline{\underline{m}}$.