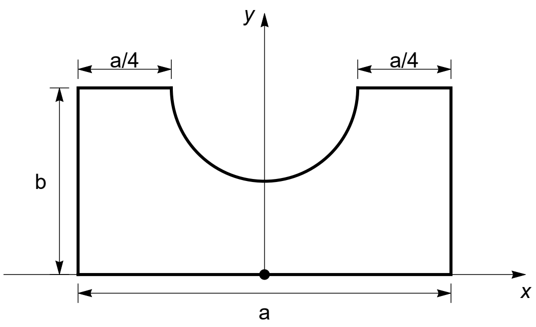
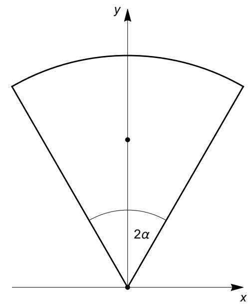
Rešitve vaje 4. marca 2021

1. Določi masno središče homogenega pravokotnika $a \times b$ s polkrožnim izrezom na sliki, če veš, da ima masno središče krožnega izreza s kotom 2α koordinati $(0, \frac{2r\sin\alpha}{3\alpha})$, glej skico krožnega izreza.





Slika 1: Pravokotnik s polkrožnim izrezom, krožni izrez.

Rešitev: Za polkrožni izrez je $\alpha = \pi/2$. Iz slike vidimo, da je polmer polkroga enak $r = a/4$. Potem ima v koordinatnem sistemu skice izreza masno središče koordinati $(0, \frac{4r}{3\pi}) = (0, \frac{a}{3\pi})$. Izračunajmo sedaj masno središče pravokotnika s polkrožnim izrezom. Sestavimo tabelo:

Lik	A	x^*	y^*
Pravokotnik	ab	0	$b/2$
Polkrog	$\pi a^2/32$	0	$b - \frac{a}{3\pi}$

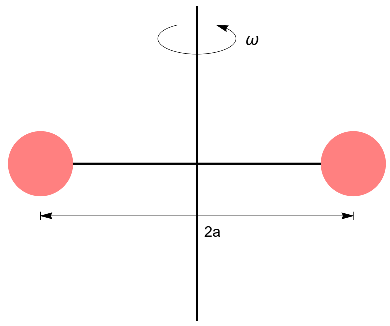
Očitno je x koordinata masnega središča 0, y koordinato pa izračunamo po formuli

$$y^* = \frac{1}{A_1 - A_2}\left(A_1 y_1^* - A_2 y_2^*\right),$$

kjer je A_1 pravokotnik, A_2 pa polkrog. Tu smo upoštevali, da je lik homogen tako, da se je gostota v zgornji enačbi pokrajšala. V enačbi je minus, ker je polkrog izrezan. Vstavimo v izraz za y^* rezultate iz tabele. Po krajšem računu dobimo

$$y^* = \frac{3a^2 + 16b^2 - \pi ab}{32b - \pi a}.$$

2. Na os je pravokotno pritrjena dvostranska ročica dolžine $2a$ z masama m na obeh koncih, glej skico. Za koliko se spremeni kotna hitrost vrtenja osi, če se dolžina ročica skrči na a.



Rešitev: Uporabili bomo zakon o ohranitvi vrtilne količine. Postavimo koordinatno os z v smer osi vrtenja. Po zavrtitvi za kot φ ima prva masa koordinte $P_1(a\cos\varphi, a\sin\varphi, 0)$, druga pa $P_2(-a\cos\varphi, -a\sin\varphi, 0)$. Pripadajoča krajevna vektorja do mas sta $\vec{r}_1 = a\vec{e}_r$ in $\vec{r}_1 = -a\vec{e}_r$. Masi krožita. Potem sta njuna vektorja hitrosti $\vec{v}_1 = a\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$ in $\vec{v}_2 = -a\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$. Vektorja vrtilne količine pa sta $\vec{l}_1 = \vec{r}_1 \times m\vec{v}_1 = a^2\dot{\varphi}\vec{k}$ in podobno $\vec{l}_2 = a^2\dot{\varphi}\vec{k}$. Vrtilna količina sistema je potem $\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 = 2a^2\dot{\varphi}\vec{k}$.

Naj se os vrti enakomerno. Potem je $\dot{\varphi} = \omega_0$ in $\vec{L} = \vec{L}_0 = 2a^2\omega_0\vec{k}$. Ko se dolžina ročice zmanjša na a je $\vec{L} = \vec{L}_1 = \frac{1}{2}a^2\omega_1\vec{k}$. Ker velja $\vec{L}_0 = \vec{L}_1$, sledi da je $\omega_1 = 4\omega_0$. Sistem s pol manjšo ročico se vrti štirikrat hitreje.

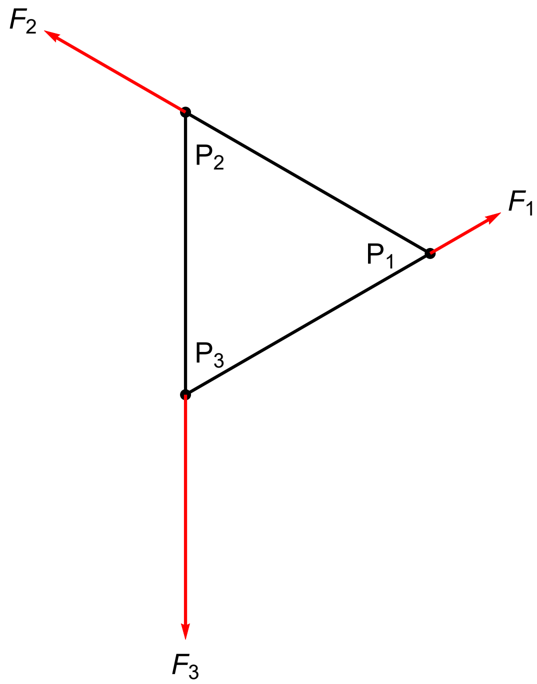
3. Enakostranični trikotnik z dolžino stranice a je obremenjen s silami F_i, $i = 1, 2, 3$ tako kot kaže slika.

   (a) Določi sistem sil.

   (b) Določi pogoj na velikosti sil F_i, $i = 1, 2, 3$ tako, da bo rezultanta danega sistema sil enak nič.

   (c) Določi pogoj na velikosti sil F_i, $i = 1, 2, 3$ tako, da bo rezultanta navorov danega sistema sil glede na središče trikotnika enak nič. Kolikšna je potem rezultanta navorov s polom v P_1.

   (d) Določi pogoj na velikosti sil F_i, $i = 1, 2, 3$, da bo sistem sil ravnovesen.



Rešitev:

(a) Postavimo izhodišče O koordinatnega sistema v središče mnogokotnika. Prijemališča sil so potem

$$P_1 = \left(\frac{a}{\sqrt{3}}, 0, 0\right), \qquad P_2 = \left(-\frac{a}{2\sqrt{3}}, \frac{a}{2}, 0\right), \qquad P_3 = \left(-\frac{a}{2\sqrt{3}}, -\frac{a}{2}, 0\right),$$

sile pa so

$$\vec{F}_1 = F_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\imath} + \frac{1}{2}\vec{\jmath}\right), \qquad \vec{F}_2 = F_2\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\vec{\imath} + \frac{1}{2}\vec{\jmath}\right), \qquad \vec{F}_3 = -F_3\vec{\jmath}.$$

(b) Rezultanta sil je

$$\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}(F_1 - F_2)\vec{\imath} + (\frac{1}{2}F_1 + \frac{1}{2}F_2 - F_3)\vec{\jmath}.$$

Iz pogoja $\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{0}$ sledi $F_1 = F_2 = F_3$.

(c) Rezultanta navorov pa je

$$\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \sum_{i=1}^{3} \vec{OP_i} \times \vec{F}_i = \frac{a}{2\sqrt{3}}(F_1 + F_2 + F_3)\vec{k}.$$

Rezultanta navorov je enaka nič, če je $(F_1 + F_2 + F_3) = 0$. Rezultanta navorov v P_1 je

$$\vec{N}(\mathcal{F}, P_1) = \sum_{i=1}^{3} \overrightarrow{P_1P_i} \times \vec{F}_i = \frac{a}{2\sqrt{3}}F_3\vec{k}.$$

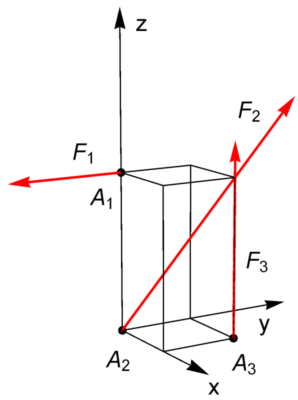
(d) Sistem sil je ravnovesen, če je $\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{0}$ in $\vec{N}(\mathcal{F}, P_1) = \vec{0}$. Potem je $F_1 = F_2 = F_3 = 0$.

4. Za prostorski sistem sil podan na sliki s silami v smereh stranic in diagonale kvadra dimenzije 1m ×1m ×2m:

   (a) določi sile in njihova prijemališča;

   (b) izračunaj rezultanto sil in navora glede na pol A_2;

   Velikosti sil so $F_1 = 1\,\mathrm{kN}$, $F_2 = 2/\sqrt{6}\,\mathrm{kN}$, $F_3 = 1\,\mathrm{kN}$.



Rešitev:

(a) Prijemališča sil imajo koordiante $A_1(0,0,2)$, $A_2(0,0,0)$ in $A_3(1,1,0)$, sile pa so $\vec{F}_1 = -\vec{\jmath}\,\mathrm{kN}$, $\vec{F}_2 = \frac{1}{3}(\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k})\,\mathrm{kN}$ in $\vec{F}_3 = \vec{k}\,\mathrm{kN}$. Točka A_2 se sovpada s koordinatnim izhodiščem, zato pišimo v nadaljevanju O namesto A_2.

(b) Rezultanta sil je

$$\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \frac{1}{3}\left(\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 5\vec{k}\right)\ \mathrm{kN},$$

rezultatnta navorov pa

$$\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \vec{OA}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{OA}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{OA}_3 \times \vec{F}_3 = (3\vec{\imath} - \vec{\jmath})\ \mathrm{kNm}.$$