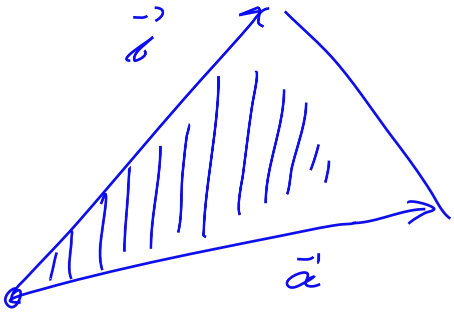
$$m_i \vec a_i = \vec F_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \vec F_{ji}$$

$$\boxed{m \vec a_* = \vec F} = \sum_{i=1}^{N} \vec F_i$$

$$\vec r_* = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec r_i$$

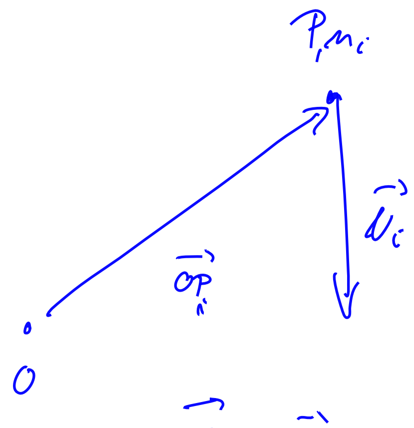
Predavanje 3. marec 2021



Masno središče trikotnika.

$$\vec r_* = \frac{1}{3}(\vec a + \vec b)$$

Izrek o vrtilni količini



gibalna količina

$m_i \vec v_i$

$$\vec l_i = \vec l_i(O) = \underline{\vec{OP_i} \times m_i \vec v_i}$$

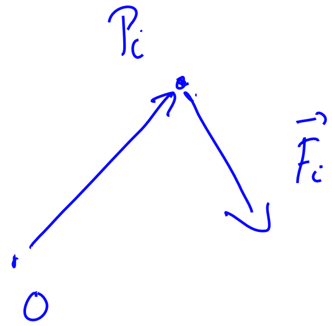
O pol vrtilne količine

Vrtilna količina

Vrtilna količina točke $\vec l_i(O) = O\vec P_i \times m_i \vec v_i$.

$$\vec L(O) = \sum_{i=1}^{N} \vec l_i(O) = \sum_{i=1}^{N} \vec{OP_i} \times m_i \vec v_i$$

O izhodišče $\Longrightarrow$ $\vec{OP_i} = \vec r_i$ $\quad \underline{\vec L(O) = \sum \vec r_i \times m_i \dot{\vec r}_i}$



Vrtilna količina sistema materialnih točk $\vec{L}(O) = \sum_{i=1}^{N} \vec{l}_i(O)$,

Navor

Navor(moment) sile $\vec{F}_i$ s prijemališčem v P_i glede na pol O: $\vec{N}(O) = \vec{OP} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$.

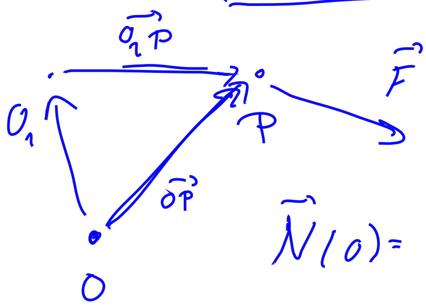
$$\vec N_i(O) = \vec{OP_i} \times \vec F_i$$

navor = moment sile

$$[\vec N_i(O)] = Nm$$

Odvisnost navora od pola

$$\boxed{\vec{N}(O) = \vec{OO_1} \times \vec{F} + \vec{N}(O_1).}$$



$\vec N(O_1)$ poznano

$$\vec N(O) = \vec{OP} \times \vec F = (\vec{OO_1} + \vec{O_1P}) \times \vec F =$$

$$\vec{OO_1} \times \vec F + \vec{O_1P} \times \vec F = \vec{OO_1} \times \vec F + \vec N(O_1)$$

Odvod vrtilne količine.

Sile na P_i $\quad \vec F_i + \sum_j \vec F_{ji}$

$$\vec{OP_i} \times \left(\vec F_i + \sum_j \vec F_{ji}\right) = \vec{OP_i} \times \vec F_i + \vec{OP_i} \times \sum_{j=1}^{N} \vec F_{ji}$$

Navor zunanjih, navor notranjih sil.

navor zunanjih sil na P_i

navor notranjih sil na P_i

$$\frac{d}{dt}\vec L(O) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \vec r_i \times m_i \dot{\vec r}_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}\left(\vec r_i \times m_i \dot{\vec r}_i\right) =$$

O fiksna točka

$$\frac{d}{dt}(f(t)g(t)) = \dot f g + f \dot g$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec f(t)\times\vec g(t)\right) = \dot{\vec f}\times\vec g + \vec f\times\dot{\vec g}$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\left(\dot{\vec r}_i\times m_i\dot{\vec r}_i + \vec r_i\times m_i\ddot{\vec r}_i\right) = \sum_{i=1}^{N}\vec r_i\times m_i\ddot{\vec r}_i \qquad m_i\ddot{\vec r}_i = \vec F_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\vec F_{ji}$$

Pojem centralne sile.

$$= \sum_{i=1}^{N}\vec r_i\times\vec F_i + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\vec r_i\times\vec F_{ji} = \vec N(O) + \vec N_n(O)$$

rezultanta navorov notranjih sil $= \vec N_n(O)$

$\vec N(O)$ rezultanta navorov zunanjih sil

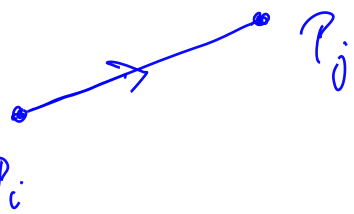
Izrek o vrtilni količini Če so notranje sile centralne, je odvod vrtilne količine enak navoru zunanjih sil.

$$\boxed{\frac{d\vec L(O)}{dt} = \vec N(O) + \cancel{\vec N_n(O)}}$$

$$\vec F_{ij} = -\vec F_{ji}$$

Ali je $\vec N_n(O) = \vec 0$?

Sila $\vec F_{ji}$ je centralna, če deluje v smeri zveznice med točkama P_i in P_j.



$$\vec F_{ji} = F_{ji}\frac{P_i - P_j}{|P_i - P_j|} = F_{ji}\frac{\overrightarrow{P_jP_i}}{|\overrightarrow{P_jP_i}|}$$

Posebni primer $N=2$

$$\vec N_n(O) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{2}\overrightarrow{OP_i}\times\vec F_{ji} = \overrightarrow{OP_1}\times\vec F_{21} + \overrightarrow{OP_2}\times\vec F_{12}$$

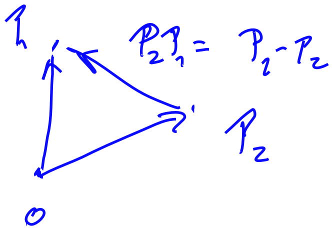
$$= (\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_2})\times\vec F_{21} = \vec 0$$

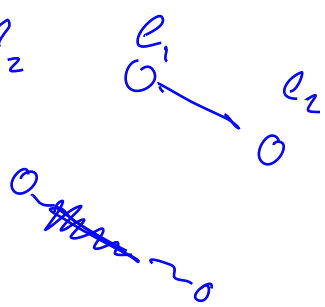
Zaprti sistem

- Zakon o ohranitvi vrtilne količine.
- Zakon o ohranitvi gibalne količine.

$$\vec F_{21} = F_{21}\frac{P_2 - P_1}{|P_2 - P_1|}$$

$\overrightarrow{P_2P_1} = P_1 - P_2$





Sistem je zaprt, če ni zunanjih sil.

$$\frac{d\vec L}{dt}(O) = \vec 0 \quad ; \quad m\vec a_* = \vec 0 \qquad \vec a_* = \vec v_*$$

$\Downarrow$

$\vec{\Gamma}(0) = \text{konst.}$ $\vec{\Gamma}(0)$ se ne spreminja, se ohranja

Zakon o ohranitvi vrtilne količine. Za zaprti sistem je $\vec{\Gamma}(0) = \text{konst.}$

Togo gibanje

$m\vec{v}_* = \text{konst} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i$ Gibalna količina se ohranja.

Definicija togega gibanja.

Pred trkom: m_1, m_2, $\vec{v}_0$, $v = 0$ | po trku: m_1, v_1, m_2, v_2

$$m_1 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

Ohranja razdalje med točkami sistema.

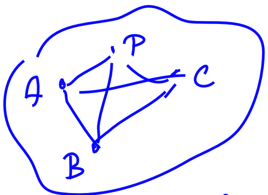
Togi sistem, togo telo.

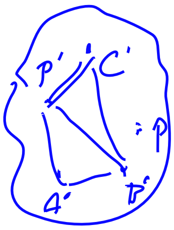
$$|\overrightarrow{P_i(t)P_j(t)}| = \text{konst.}$$

sistem, ki se lahko giblje samo togo.

Togo gibanje je natanko določeno z gibanjem treh nekolinearnih točk.

ne ležijo na isti premici





$A \mapsto A'$

$B \mapsto B'$

$C \mapsto C'$

$P \mapsto P'$

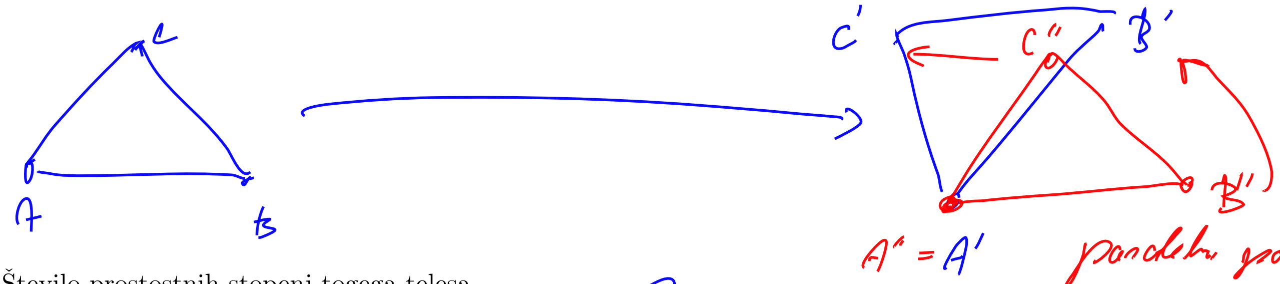
$|AB| = |A'B'|, \ldots$

Razcep togega gibanja na translatorno in rotacijsko gibanje.

$|AP| = |A'P'|, \ldots$

Dovolj je poznati gibanje treh nekolinearnih točk togega telesa.

Togo gibanje je dano s 6 parametri.



paralelni premik

translacija

Število prostostnih stopenj togega telesa.

6

togi premik = translacija (3) + rotacija (3)

Togo gibanje je kompozitum iz translatornega in rotacijskega gibanja.

Translatorni del gibanja togega telesa določa enačba gibanja masnega središča.
Rotacijski del gibanja togega telesa določa izrek o vrtilni količini.

Dinamika togega sistema je natanko določena z enačbo gibanja masnega središča in izrekom o vrtilni količini.

Ravninsko togo gibanje.

$3 \times 2 = 6$

$6 - 3 = \underline{\underline{3}}$

translacija 2

rotacija 1

kot zasuka okrog normale na ravnino.

⇕

smer pravokotne na ravnino.

STATIKA TOGEGA TELESA

Togo telo je v statičnem ravnovesju natanko tedaj, ko

- rezultanta vseh zunanjih sil je enaka nič;
- rezultanta navorov zunanjih sil je enaka nič.

$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \vec{0} \Rightarrow m\vec{a}_* = \vec{0}$

$\Downarrow$

$\vec{v}_* = konst$

$\sum_{i=1}^{N} \vec{OT}_i \times \vec{F}_i = \vec{0}$

$\Downarrow$

$\vec{L}(O)$ konst $\Leftrightarrow$ telo se enakomerno vrti

$\Downarrow$

os je stalna in kotna hitrost je konst.

Togo telo se v danem koordinatnem sistemu ne giblje natanko tedaj, ko je

- v statičnem ravnovesju in
- miruje v začetnem trenutku;

neenakomerno.

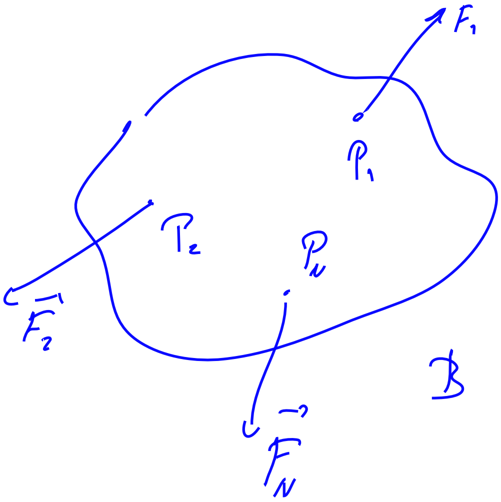
Nezadostnost posameznih pogojev.

1. $\vec{F} = \vec{0}$, $\vec{N} \neq \vec{0}$ + telo miruje v začetnem trenutku;
2. $\vec{F} \neq \vec{0}$, $\vec{N} = \vec{0}$ + telo miruje v začetnem trenutku;
3. $\vec{F} = \vec{0}$, $\vec{N} = \vec{0}$ + telo ne miruje v začetnem trenutku.

telo preide v vrtenje

telo preide v translatorno gibanje

Sistem sil



$(P_1, \vec F_1)$

Sistem sil $\mathcal{F} = \{(P_1, \vec{F}_1), \ldots, (P_n, \vec{F}_n)\}$.

Rezultanta sistema sil $\vec{R}(\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$.

$$\vec R(\mathcal F) = \sum_{i=1}^{N} \vec F_i$$

Moment sistema sil $\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \sum_{i=1}^{n} \vec{OP}_i \times \vec{F}_i$.

$$\vec N(\mathcal F, O) = \sum_{i=1}^{N} \vec N_i(O)$$

$$\vec N_i(O) = \vec{OP_i} \times \vec F_i = \vec{OO_1} \times \vec F_i + \vec N_i(O_1)$$

Odvisnost momenta od pola. Velja

$$\vec N(\mathcal F, O) = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{OO_1} \times \vec F_i + \vec N_i(O_1)\right) = \vec{OO_1} \times \vec R(\mathcal F) + \vec N(\mathcal F, O_1)$$

Pisava $\mathcal{F}_1 \equiv \mathcal{F}_2$

$$\boxed{\vec{N}(\mathcal{F}, O_1) = \vec{O_1O_2} \times \vec{R}(\mathcal{F}) + \vec{N}(\mathcal{F}, O_2).}$$

Definicija Sistema sil $\mathcal{F}_1$ in $\mathcal{F}_2$ sta ekvipolentna, če velja:

ekvivalentna, ekvipolentna

1. $\vec{R}(\mathcal{F}_1) = \vec{R}(\mathcal{F}_2)$ in
2. obstaja pol O ~~takom~~ tako, da je $\vec{N}(\mathcal{F}_1, O) = \vec{N}(\mathcal{F}_2, O)$.

Ali morda $\vec{N}(\mathcal{F}_1, O_1) \neq \vec{N}(\mathcal{F}_2, O_2)$, če sta $\mathcal{F}_1$ in $\mathcal{F}_2$ ekvipolentna?

To ni možno.

$\Longleftarrow$

Trditev Sistema sil $\mathcal{F}_1$ in $\mathcal{F}_2$ sta ekvipolentna natanko tedaj, ko je $\vec{R}(\mathcal{F}_1) = \vec{R}(\mathcal{F}_2)$ in $\vec{N}(\mathcal{F}_1, O) = \vec{N}(\mathcal{F}_2, O)$ za vsak pol O.

$R(\mathcal{F}_1) = R(\mathcal{F}_2)$ in $\vec{N}(\mathcal{F}_1, O_1) = \vec{N}(\mathcal{F}_2, O_1)$

$\Rightarrow$ $\vec{N}(\mathcal{F}_1, O) = \vec{N}(\mathcal{F}_2, O)$ za vsak O

$$\vec{N}(\mathcal{F}_1, O) = \vec{OO_1} \times \vec{R}(\mathcal{F}_1) + \vec{N}(\mathcal{F}_1, O_1) =$$
$$= \vec{OO_1} \times \vec{R}(\mathcal{F}_2) + \vec{N}(\mathcal{F}_2, O_1) = \vec{N}(\mathcal{F}_2, O)$$

Trditev Sistema sil $\mathcal{F}_1$ in $\mathcal{F}_2$ sta ekvipolentna natanko tedaj, ko je $\vec{N}(\mathcal{F}_1, O_i) = \vec{N}(\mathcal{F}_2, O_i)$ za tri nekolinearne točke O_1, O_2 in O_3.

$(\Rightarrow)$ očitno $\vec{N}(\mathcal{F}_1, O) = \vec{N}(\mathcal{F}_2, O)$ za vsak O

$(\Leftarrow)$ $\vec{N}(\mathcal{F}_1, O_i) = \vec{N}(\mathcal{F}_2, O_i)$ $\quad i = 1, 2, 3$

$\vec{R}(\mathcal{F}_1) = \vec{R}(\mathcal{F}_2)$?

O_3 O_2 O_1

$$\vec N(\mathcal F_1, O_2) = \vec{O_2O_1}\times \vec R(\mathcal F_1) + \vec N(\mathcal F_1, O_1)$$
$$\vec N(\mathcal F_2, O_2) = \vec{O_2O_1}\times \vec R(\mathcal F_2) + \vec N(\mathcal F_2, O_1)$$
$$\Rightarrow \vec 0 = \vec{O_2O_1}\times(\vec R(\mathcal F_1)-\vec R(\mathcal F_2))$$
$$\vec R(\mathcal F_1)-\vec R(\mathcal F_2) \parallel \vec{O_2O_1}$$

Podobno $\vec 0 = \vec{O_3O_1}\times(\vec R(\mathcal F_1)-\vec R(\mathcal F_2)) \iff \vec R(\mathcal F_1)-\vec R(\mathcal F_2)\parallel \vec{O_3O_1}$

$\Downarrow$

$\vec{O_2O_1}\parallel\vec{O_3O_1}$

Dva ekvivalentna sistema sil imata enak dinamični efekt na togo telo.
Dinamika togega telesa pod vplivom sistema sil $\mathcal{F}$ je natanko določena z $\vec{R}(\mathcal{F})$ in $\vec{N}(\mathcal{F}, O)$.

Definicija Sistem sil $\mathcal{F}$ je:

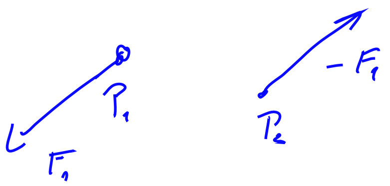
- *ravninski*, če vsa prijemališča in sile ležijo v isti ravnini;
- *ravnovesen*, če je $\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{0}$ in $\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \vec{0}$; $\mathcal F \equiv \emptyset$
- *dvojica*, če je $\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{0}$ in $\vec{N}(\mathcal{F}, O) \neq \vec{0}$;
- *ima skupno prijemališče*, če obstaja točka P_0 tako, da je $\vec{R}(\mathcal{F}) \neq \vec{0}$ in $\vec{N}(\mathcal{F}, P_0) = \vec{0}$;

$\vec{P_1P_2} \not\parallel \vec F_1$

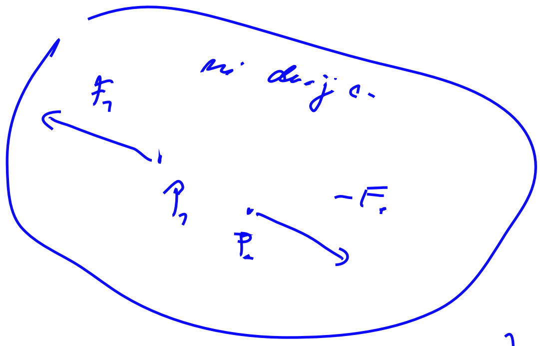
$\mathcal F = \{(P_1, \vec F_1), (P_2, -\vec F_1)\}$

$\vec R(\mathcal F) = \vec 0$

$\vec N(\mathcal F, P_1) = \vec{P_1P_2}\times(-\vec F_1)$



$P_1 \neq P_2$



$\vec N(\mathcal F, O) = \vec{OP_1}\times \underbrace{\vec R(\mathcal F)}_{\shortparallel\ 0} + \vec N(\mathcal F, P_1)$

Dvojica = navor – je prosti vektor (pol ni pomemben)

Če je sistem sil $\mathcal{F}$ ravnovesen, je $\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \vec{0}$ za vsako točko O. = Ravnovesne enačbe so neodvisne od izbire pola.

$\Updownarrow$

$\vec R(\mathcal F) = 0$ in $\vec N(\mathcal F, O_1)$

Osnovni principi statike

Operacije nad sistemom sil, ki ohranjajo ekvipolentnost sistema sil.

- Princip o aditivnosti sil s skupnim prijemališčem.

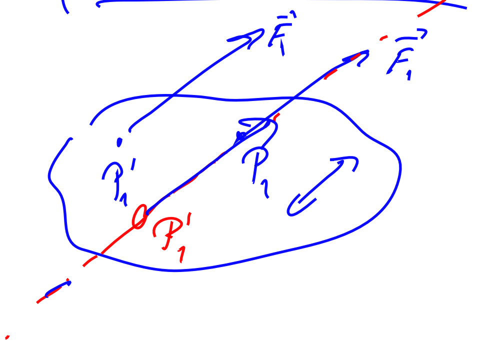
$$\mathcal{F} = \{(P_1, \vec F_1), \underbrace{(P_1, \vec F_2), (P_3, \vec F_3), \dots, (P_N, \vec F_N)}\}$$

$$\equiv \{(P_1, \vec F_1 + \vec F_2), (P_3, \vec F_3), \dots, (P_N, \vec F_N)\} = \mathcal{F}'$$

$\vec R(\mathcal{F}) = \vec R(\mathcal{F}')$ $\quad \vec{OP_1} \times \vec F_1 + \vec{OP_1} \times \vec F_2 = \vec{OP_1} \times (\vec F_1 + \vec F_2)$

$\vec N(\mathcal{F}, O) = \vec N(\mathcal{F}', O)$

- Princip o polznosti sile.



$$\underbrace{\{(P_1, \vec F_1), \dots, (P_N, \vec F_N)\}}_{\mathcal{F}} \stackrel{?}{\equiv} \underbrace{\{(P_1', \vec F_1), (P_2, \vec F_2), \dots, (P_N, \vec F_N)\}}_{\mathcal{F}'}$$

$\vec R(\mathcal{F}) = \vec R(\mathcal{F}')$ ✓

$$\vec{OP_1} \times \vec F_1 = \vec{OP_1'} \times \vec F_1 \Rightarrow (\vec{OP_1} - \vec{OP_1'}) \times \vec F_1 = \vec 0$$

- Princip o ravnotežnem paru sil.

$$\mathcal{F} = \{(P_1, \vec F_1), \dots, (P_N, \vec F_N)\} \equiv \{(P_0, \vec F_0), (P_0, -\vec F_0), (P_1, \vec F_1), \dots, (P_N, \vec F_N)\}$$