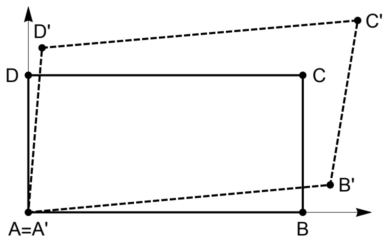
# Poglavje 8

# Deformacija

## 8.1 Ravninska deformacija

### 8.1.1 Rešene naloge

1. Pravokotnik $ABCD$ se homogeno deformira v četverokotnik $A'B'C'D'$ tako kot kaže skica. Dolžine stranic referenčnega pravokotnika sta $|AB| = 200\,\text{mm}$ in $|AD| = 100\,\text{mm}$, dolžine stranic deformiranega četverokotnika pa so $|AB'| = 200.5\,\text{mm}$, $|AD'| = 100.3\,\text{mm}$, kot $\angle B'AD'$ pa je $89.5°$.




   (a) Izračunaj infinitezimalni deformacijski tenzor.
   (b) Določi maksimalno osno deformacijo.
   (c) Določi osno deformacijo v smeri diagonale pravokotnika.

**Rešitev:**

(a) Komponente deformacijskega tenzorja dobimo po formulah

$$\epsilon_{11} = \frac{|A'B'|}{|AB|} - 1 = 2.5 \times 10^{-3},$$

$$\epsilon_{22} = \frac{|A'C'|}{|AD|} - 1 = 3 \times 10^{-3}$$

in

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{2}\gamma_{12} = \frac{1}{2}\frac{0.5°}{180°}\pi \doteq 4.4 \times 10^{-3}.$$

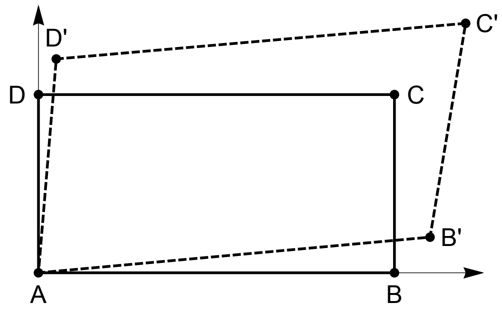
(b) Maksimalno osno deformacijo dobimo po formuli

$$\epsilon_{\max} = \frac{1}{2}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + \sqrt{\left(\frac{\epsilon_{11} - \epsilon_{22}}{2}\right)^2 + \epsilon_{12}^2} \doteq 7.2 \times 10^{-3}.$$

(c) Enotski vektor v smeri diagonale je $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\vec{\imath} + \vec{\jmath})$. Osna deformacija v smeri diagonale je tako

$$\vec{n}\cdot(\underline{\underline{\epsilon}}\vec{n}) = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot 10^{-3}\begin{bmatrix} 2.5 & 4.4 \\ 4.4 & 3 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{10^{-3}}{5}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 9.4 \\ 11.8 \end{bmatrix} \doteq 6.12\times 10^{-3}.$$

2. Pravokotnik $ABCD$ se deformira v četverokotnik $AB'C'D'$ tako kot kaže skica. Dolžine stranic referenčnega pravokotnika sta $|AB| = 20.0\,\text{cm}$ in $|AD| = 10.0\,\text{cm}$, dolžine stranic deformiranega četverokotnika pa so $|AB'| = 20.1\,\text{cm}$, $|AD'| = 10.1\,\text{cm}$, kot $\angle B'AD'$ pa je $87.5°$.




   (a) Izračunaj infinitezimalni deformacijski tenzor v $A$.

   (b) Določi maksimalno osno deformacijo v $A$. V kater smeri nastopi?

**Rešitev:**

(a) Osni deformaciji sta

$$\epsilon_{11} = \frac{|AB'| - |AB|}{|AB|} = \frac{20.1 - 20}{20} = 0.005$$

in

$$\epsilon_{22} = \frac{|AD'| - |AD|}{|AD|} = \frac{10.1 - 10}{10} = 0.01.$$

Sprememba kota je

$$\gamma_{12} = \frac{2.5°}{180°}\pi \doteq 0.0426.$$

Potem

$$\underline{\underline{\epsilon}} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 5 & 21.8 \\ 21.8 & 10 \end{bmatrix}.$$

(b) Maksimalno osno deformacijo dobimo po formuli

$$\epsilon^{\max} = \frac{1}{2}\left(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \sqrt{(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})^2 + \gamma_{12}^2}\right) \doteq \frac{1}{2}\left(15 + \sqrt{25 + (42.6)^2}\right) \doteq 29.4 \times 10^{-3}$$

(c) Ekstremalna smer je dana z

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\arctan\frac{\gamma_{12}}{\epsilon_{22} - \epsilon_{11}} \doteq 41.7°.$$

3. S tremi ekstenziometri, ki oklepajo medsebojni kot $45\,°$ smo izmerili osne deformacije: v vodoravni smeri $\epsilon_a = 10^{-3}$, v navpični smeri $\epsilon_b = -3 \times 10^{-3}$ in v diagonalni smeri $\epsilon_c = 10^{-3}$.

   (a) Določi pripadajoči deformacijski tenzor.

   (b) Določi maksimalno osno deformacijo.

**Rešitev:**

(a) Postavimo os $x$ v vodoravni smer, os $y$ pa v navpično. Deformacijskemu tenzorju pripada matrika

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} \end{bmatrix}.$$

Očitno je $\epsilon_{11} = \epsilon_a$ in $\epsilon_{22} = \epsilon_b$. Komponento $\epsilon_{12}$ določimo iz pogoja $\vec{n} \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \cdot \vec{n} = \epsilon_c$, kjer je $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath} + \vec{\jmath})$. Tako dobimo enačbo $\frac{1}{2}(\epsilon_{11} + 2\epsilon_{12} + \epsilon_{22}) = \epsilon_c$. Od tod $\epsilon_{12} = 2 \times 10^{-3}$ in

$$\underline{\underline{\epsilon}} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

(b) Uporabimo formulo

$$\epsilon_{\max} = \frac{1}{2}\left(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \sqrt{(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})^2 + 4\epsilon_{12}^2}\right).$$

Vstavimo izračunano in dobimo $\epsilon_{\max} = (-1 + 2\sqrt{2})10^{-3}$.

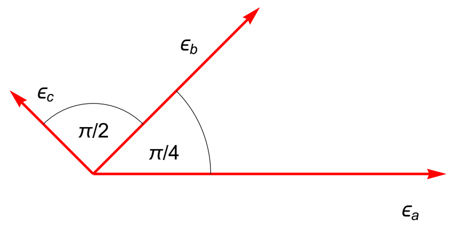
4. Z ekstenziometrom smo v označenih smereh na skici izmerili osne deformacije $\epsilon_{\mathrm{a}} = 0.003$, $\epsilon_{\mathrm{b}} = 0.002$ in $\epsilon_{\mathrm{c}} = 0.001$.

   (a) Določi infinitezimalni deformacijski tenzor.

   (b) Izračunaj ektremalni osni deformaciji in pripadajoči smeri.

   (c) V kateri smeri je osna deformacija največja?

   (d) Določi tudi ekstremalno strižno deformacijo.




**Rešitev:**

(a) Postavimo os $x$ v smeri deformacije $\epsilon_a$. Potem je

$$\underline{\underline{\epsilon}} = 10^{-3}\begin{bmatrix} \epsilon_a & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} \end{bmatrix}.$$

Uporabimo formulo za osno deformacijo

$$\epsilon(\varphi) = \frac{1}{2}(\epsilon_a + \epsilon_{22}) + \frac{1}{2}(\epsilon_a - \epsilon_{22})\cos 2\varphi + \epsilon_{12}\sin 2\varphi$$

enkrat za $\varphi = \pi/4$, drugič pa za $\varphi = 3\pi/4$. Tako dobimo enačbi

$$\epsilon_b = \frac{1}{2}(\epsilon_a + \epsilon_{22}) + \epsilon_{12}, \quad \epsilon_c = \frac{1}{2}(\epsilon_a + \epsilon_{22}) - \epsilon_{12}.$$

Enačbi seštejemo. Potem $\epsilon_b + \epsilon_c = \epsilon_a + \epsilon_{22}$ in $\epsilon_{22} = \epsilon_b + \epsilon_c - \epsilon_a = 0$. Če enačbi odštejemo, dobimo $\epsilon_b - \epsilon_c = 2\epsilon_{12}$ in tako $\epsilon_{12} = \frac{1}{2}10^{-3}$. Tako smo dobili

$$\underline{\underline{\epsilon}} = 10^{-3}\begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Ekstremalna osna deformacija je

$$\epsilon_{ext} = (3/2 \pm \sqrt{(3/2)^2 + (1/2)^2})10^{-3} = \frac{1}{2}\left(3 \pm \sqrt{10}\right)10^{-3}.$$

Pripadajoči ekstremalni smeri dobimo po formuli

$$\tan 2\varphi = \frac{2\epsilon_{12}}{\epsilon_{11} - \epsilon_{22}} = \frac{1}{3}.$$

Od tod

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{3}, \quad \varphi_2 = \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{3} + \frac{\pi}{2}.$$

(c) Iz skice Mohrove krožnce za deformacijo vidimo, da je maksimalna osna deformacija v smeri $\varphi_1$.

(d) Maksimalna strižna deformacija je

$$\gamma_{max} = \epsilon_{max} - \epsilon_{min} = \sqrt{10}\, 10^{-3}.$$

5. V danem koordinatnem sistemu ima deformacijski tenzor ravninskega deformacijskega stanja komponente $\epsilon_{11} = (2+\sqrt{3})\epsilon_0$, $\epsilon_{12} = \epsilon_0$ in $\epsilon_{22} = (2-\sqrt{3})\epsilon_0$. Poišči tak koordinatni sistem, da bo pripadajoča matrika komponent deformacijskega tenzorja diagonalna in izračunaj diagonalna elementa.

**Rešitev:** Pri rotaciji danega koordinatnega sistema za kot $\varphi$ okrog osi $\vec{k}$ ima deformacijski tenzor komponente

$$\begin{aligned}
\epsilon'_{11} &= \frac{1}{2}(\epsilon_{11}+\epsilon_{22}) + \frac{1}{2}(\epsilon_{11}-\epsilon_{22})\cos 2\varphi + \epsilon_{12}\sin 2\varphi = \epsilon_0\left(\sin 2\phi + \sqrt{3}\cos 2\phi + 2\right)\\
\epsilon'_{22} &= \frac{1}{2}(\epsilon_{11}+\epsilon_{22}) - \frac{1}{2}(\epsilon_{11}-\epsilon_{22})\cos 2\varphi - \epsilon_{12}\sin 2\varphi = \epsilon_0\left(-\sin 2\phi - \sqrt{3}\cos 2\phi + 2\right)\\
\epsilon'_{12} &= -\frac{1}{2}(\epsilon_{11}-\epsilon_{22})\sin 2\varphi + \epsilon_{12}\cos 2\varphi = \epsilon_0\left(\cos 2\phi - \sqrt{3}\sin 2\phi\right).
\end{aligned}$$

Zahtevamo $\epsilon'_{12} = 0$. Od tod

$$\cos 2\phi - \sqrt{3}\sin 2\phi = 0.$$

Enačba ima dve rešitvi, $\varphi = -5\pi/12$ in $\varphi = \pi/12$. V prvem primeru je $\epsilon'_{11} = 0$ in $\epsilon'_{22} = 4\epsilon_0$, v drugem pa $\epsilon'_{11} = 4\epsilon_0$ in $\epsilon'_{22} = 0$.

6. Ravninska deformacija deformira pravokotni trikotnik z dolžinama katet $a$ in $b$ v trikotnik z oglišči v točkah $A = (x_0, y_0)$, $B = (x_0 + a_{11}, y0 + a_{12})$ in $C = (x_0 + a_{21}, y0 + a_{22})$. Spremembe dolžin so majhne.

(a) Določi deformacijski tenzor na geometrijski način.

(b) Zapiši deformacijo s pomikom.

(c) Izračunaj infinitezimalen deformacijski tenzor.

(d) Izračunaj deformacijski tenzor.

**Rešitev:**

(a) Postavimo os $X$ v smeri katete z dolžino $a$ in os $Y$ v smer druge katete. Potem sta v koordinatnem sistemu $XY$ diagonalna elementa deformacijskega tenzorja pri predpostavki majhne deformacije enaka relativni spremembi dolžin stranic. Tako velja

$$E_{11} = \frac{1}{a}\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2} - 1 = \sqrt{1 + \frac{a_{11}^2 + a_{12}^2 - a^2}{a^2}} - 1 \doteq \frac{1}{2}\frac{a_{11}^2 + a_{12}^2 - a^2}{a^2}$$

in

$$E_{22} = \frac{1}{b}\sqrt{a_{21}^2 + a_{22}^2} - 1 = \sqrt{1 + \frac{a_{21}^2 + a_{22}^2 - b^2}{b^2}} - 1 \doteq \frac{1}{2}\frac{a_{21}^2 + a_{22}^2 - b^2}{b^2}.$$

Pri izračunu smo upoštevali, da je deformacija majhna, zato se dolžina stranice $AB$ le malo razlikuje od prvotne dolžine $a$. Z enačbo, velja

$$\left|\frac{a_{11}^2 + a_{12}^2 - a^2}{a^2}\right| << 1$$

in zato

$$\sqrt{1+\frac{a_{11}^2+a_{12}^2-a^2}{a^2}} \doteq 1+\frac{1}{2}\frac{a_{11}^2+a_{12}^2-a^2}{a^2}.$$

Nadalje je $E_{12}$ enak poločni spremembi kota $\Delta\varphi = \pi/2-\varphi$ med katetama. Za kot $\varphi$ med katetama deformiranega trikotnika velja

$$\cos\varphi = \frac{a_{11}a_{21}+a_{12}a_{21}}{\sqrt{a_{11}^2+a_{12}^2}\sqrt{a_{21}^2+a_{22}^2}}.$$

Potem

$$E_{12} = \frac{1}{2}\Delta\varphi \doteq \sin\frac{1}{2}\Delta\varphi = \frac{1}{2}\cos\varphi = \frac{1}{2}\frac{a_{11}a_{21}+a_{12}a_{21}}{\sqrt{a_{11}^2+a_{12}^2}\sqrt{a_{21}^2+a_{22}^2}}.$$

(b) Ker se trikotnik deformira v trikotnik, je deformacija afina. Splošna oblika afine preslikave med referenčnimi koordinatami $X, Y$ in prostorskimi je

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1+\alpha_{11}X+\alpha_{21}Y, \\ y &= \alpha_2+\alpha_{12}X+\alpha_{22}Y. \end{aligned}$$

Ker se izhodišče $X=0$, $Y=0$ preslika v točko $A$, velja $\alpha_1 = x_0$ in $\alpha_2 = y_0$. Nadalje se par $X=a$, $Y=0$ preslika v točko $B$. Potem $x_0+a_{11} = x_0+\alpha_{11}a$ in $y_0+a_{12} = x_0+\alpha_{12}a$. Tako dobimo $\alpha_{11} = a_{11}/a$ in $\alpha_{12} = a_{12}/a$. Podobno $\alpha_{21} = a_{21}/b$ in $\alpha_{22} = a_{22}/b$. Iskana preslikava je tako

$$\begin{aligned} x &= x_0+\frac{a_{11}}{a}X+\frac{a_{21}}{b}Y, \\ y &= y_0+\frac{a_{12}}{a}X+\frac{a_{22}}{b}Y. \end{aligned}$$

Če deformacijo zapišemo s pomikom je

$$\begin{aligned} x = X+u_1(X,Y) &= x_0+\frac{a_{11}}{a}X+\frac{a_{21}}{b}Y, \\ y = Y+u_2(X,Y) &= y_0+\frac{a_{12}}{a}X+\frac{a_{22}}{b}Y. \end{aligned}$$

Od tod sledi

$$\begin{aligned} u_1(X,Y) &= x_0+\frac{a_{11}}{a}X+\frac{a_{21}}{b}Y-X, \\ u_2(X,Y) &= y_0+\frac{a_{12}}{a}X+\frac{a_{22}}{b}Y-Y. \end{aligned}$$

(c) Gradient pomika je

$$\operatorname{Grad}\vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{a_{11}}{a}-1 & \frac{a_{21}}{b} \\ \frac{a_{12}}{a} & \frac{a_{22}}{b}-1 \end{bmatrix}$$

Potem

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{Grad}\vec{u}+(\operatorname{Grad}\vec{u})^T\vec{u}\right) = \begin{bmatrix} \frac{a_{11}}{a}-1 & \frac{1}{2}\left(\frac{a_{21}}{b}+\frac{a_{12}}{a}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{a_{21}}{b}+\frac{a_{12}}{a}\right) & \frac{a_{22}}{b}-1 \end{bmatrix}.$$

Če primerjamo $\underline{\underline{\epsilon}}$ z $\underline{\underline{E}}$, vidimo, da se v splošnem povsem razlikujeta.

(d) Izračunajmo sedaj še deformacijski tenzor $\underline{\underline{E}}$ po formuli

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{\epsilon}}+\frac{1}{2}(\operatorname{Grad}\vec{u})^T\operatorname{Grad}\vec{u} = \underline{\underline{\epsilon}}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \left(\frac{a_{11}}{a}-1\right)^2+\left(\frac{a_{12}}{a}\right)^2 & \left(\frac{a_{11}}{a}-1\right)\frac{a_{21}}{b}+\left(\frac{a_{22}}{b}-1\right)\frac{a_{12}}{a} \\ & \left(\frac{a_{22}}{b}-1\right)^2+\left(\frac{a_{21}}{b}\right)^2 \end{bmatrix}.$$

Po krajšem računu dobimo

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{a_{11}^2+a_{12}^2-a^2}{a^2} & \frac{a_{11}a_{21}+a_{12}a_{21}}{ab} \\ & \frac{a_{21}^2+a_{22}^2-b^2}{b^2} \end{bmatrix}.$$

Dobljeni rezultat se do prvega reda natankosti ujema z rezultatom, ki smo ga dobili po geometrijski poti.

7. Na primeru rotacije pokaži, da infinitezimalen deformacijski tenzor ni dobra mera deformacije pri velikih pomikih.

   **Rešitev:** Postavimo koordinatno os $Z$ v smeri osi rotacije. Potem rotaciji za kot $\theta$ pripada matrika

$$Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

   deformacija, ki jo lahko obravnavamo kot ravninsko deformacijo, pa je dana z

$$\begin{aligned} x &= X\cos\theta - Y\sin\theta = X + X\cos\theta - Y\sin\theta - X, \\ y &= X\sin\theta + Y\cos\theta = Y + X\sin\theta + Y\cos\theta - Y. \end{aligned}$$

   Od tod dobimo komponenti pomika

$$\begin{aligned} u_1 &= X\cos\theta - Y\sin\theta - X, \\ u_2 &= X\sin\theta + Y\cos\theta - Y. \end{aligned}$$

   Gradient pomika je

$$\mathrm{Grad}\,\vec{u} = \begin{bmatrix} \cos\theta - 1 & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - 1 \end{bmatrix}.$$

   Pripadajoči infinitezimalni deformacijski tenzor je tako

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Grad}\,\vec{u} + (\mathrm{Grad}\,\vec{u})^T\right) = \begin{bmatrix} \cos\theta - 1 & 0 \\ 0 & \cos\theta - 1 \end{bmatrix}.$$

   Rotacija ohranja razdalje, zato je prava mera rotacije enaka nič. Za $\theta = \pi/2$ pa dobimo $\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ in potemtakem $\underline{\underline{\epsilon}}$ ni prava mera za velike pomike. Prava mera je deformacijski tenzor

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{\epsilon}} + \frac{1}{2}(\mathrm{Grad}\,\vec{u})^T\,\mathrm{Grad}\,\vec{u}.$$

   Po kratkem računu dobimo, da je $\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{0}}$.

### 8.1.2 Dodatne naloge

1. V danem koordinatnem sistemu ima deformacijski tenzor ravninskega deformacijskega stanja komponente $\epsilon_{11} = 3\epsilon_0$, $\epsilon_{12} = \epsilon_0\sqrt{3}$ in $\epsilon_{22} = \epsilon_0$. Poišči tak koordinatni sistem, da bo pripadajoča matrika komponent deformacijskega tenzorja diagonalna in izračunaj diagonalna elementa.

   **Rešitev:** Kot $\varphi = \pi/6$ ali $\varphi = -2\pi/6$. Diagonalna elementa $4\epsilon_0$ in 0.