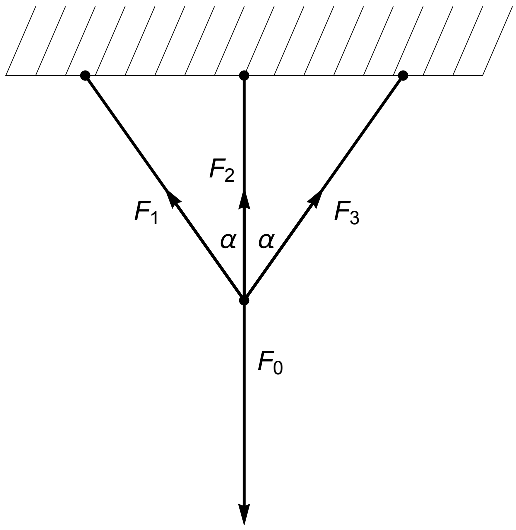
Poglavje 7

Enoosna deformacija in napetost

7.1 Statično nedoločene naloge

7.1.1 Rešene naloge

1. Paličje na sliki je sestavljeno iz treh elastičnih palic. Vse tri imajo enak presek A in Youngov modul E. Kot α je $\pi/4$, srednja palica pa ima dolžino 1 m. Palice so pritrjene členkasto na stropu in so v spodnjem členku obremenjene s silo $F_0 = 15\,\text{kN}$. Določi sile v palicah in izračunaj pomik spodnjega členka.



Rešitev: Sistem treh neznanih sil ima skupno prijemališče, zato je naloga statično nedoločena. Za določitev sil palic moramo upoštevati osne deformacije palic. Zaradi simetrije je $F_1 = F_3$. Ravnovesna enačba sil v navpični smeri je

$$2F_1 \cos\alpha + F_2 = F_0.$$

Po Hookovem zakonu je

$$F_1 = AE\frac{\Delta l_1}{l_1}, \qquad F_2 = AE\frac{\Delta l_2}{l_2},$$

kjer sta l_1 in l_2 dolžini leve in sredinske palice, Δl_1 in Δl_2 pa njuna osna pomika. Pri obtežitvi se paličje raztegne v navpični smeri. Po deformaciji velja

$$(l_1 + \Delta l_1)^2 = d^2 + (l_2 + \Delta l_2)^2.$$

Tu je d razdalja med pritrdiščema palic na stropu. Ker je $l_1^2 = d^2 + l_2^2$, sledi da je

$$2l_1\Delta l_1 + (\Delta l_1)^2 = 2l_2\Delta l_2 + (\Delta l_2)^2.$$

Pri predpostavki majhnih deformacij pri kateri velja Hookov zakon smemo zanemariti člena $(\Delta l_1)^2$ in $(\Delta l_2)^2$. Tako dobimo

$$l_1 \Delta l_1 = l_2 \Delta l_2.$$

oziroma $\Delta l_1 = \Delta l_2 l_2 / l_1$. Ravnovesna enačbe se potem glasi

$$F_0 = \frac{2AE\Delta l_2 l_2 \cos\alpha}{l_1^2} + \frac{AE\Delta l_2}{l_2} = \frac{2AE\Delta l_2 l_2^2}{l_1^3} + \frac{AE\Delta l_2}{l_2}.$$

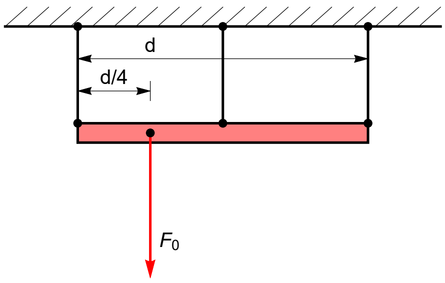
V zadnji enakosti smo upoštevali, da je $\cos\alpha = l_2/l_1$. Rešitev enačbe je

$$\Delta l_2 = \frac{F_0 l_1^3 l_2}{AE\,(l_1^3 + 2l_2^3)}.$$

Sili sta potem

$$F_1 = \frac{F_0 l_1 l_2^2}{l_1^3 + 2l_2^3} = \frac{F_0 \cos^2(\alpha)}{2\cos^3(\alpha) + 1} = 15(1 - 1/\sqrt{2})\mathrm{kN},$$
$$F_2 = \frac{F_0 l_1^3}{l_1^3 + 2l_2^3} = \frac{F_0}{2\cos^3(\alpha) + 1} = 30(1 - 1/\sqrt{2})\mathrm{kN}.$$

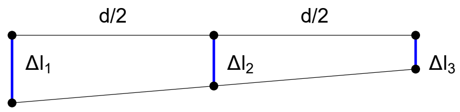
2. S stropa je na treh žici obešen togi nosilec dolžine d, glej sliko. Žice so enako dolge, imajo enak Youngov modul E in presek A. Za obremenitev na skici določi sile žic.



Rešitev: Sile žic označimo z F_1, F_2 in F_3. Sistem vzporednih sil ima skupno prijemališče, zato je sistem statično nedoločen. Ravnovesni enačbi, vsota sil v navpični smeri in ravnovesje momentov sta

$$0 = F_1 + F_2 + F_3 - F_0,$$
$$0 = -\frac{d}{4}F_0 + \frac{d}{2}F_2 + dF_3.$$

Sile žic so osne sile dane s Hookovim zakonom $F_i = AE\Delta l_1/l$, kjer je l nedeformirana dolžina žice, Δl_i pa njen raztezek, glej skico.



Ko obesimo nosilec, se žice raztegnejo in ker je nosilec tog, pritrdišča žic na nosilec ostanejo na isti premici. Smerni koeficient premice je določen s parom dveh točk. Ker je za oba para enak, sledi enačba

$$\frac{\Delta l_2 - \Delta l_1}{d} = \frac{\Delta l_3 - \Delta l_2}{d}.$$

oziroma

$$2\Delta l_2 = \Delta l_3 + \Delta l_2.$$

Vstavimo v ravnovesne enačbe še Hookov zakon. Tako dobimo sistem

$$F_0 = \frac{AE\Delta l_1}{l} + \frac{AE\Delta l_2}{l} + \frac{AE\Delta l_3}{l},$$
$$-\frac{d}{4}F_0 = \frac{AEd\Delta l_2}{2l} + \frac{AEd\Delta l_3}{l},$$
$$2\Delta l_2 = \Delta l_3 + \Delta l_2.$$

Rešitev sistema je

$$\Delta l_1 = \frac{7F_0 l}{12AE}, \quad \Delta l_2 = \frac{F_0 l}{3AE}, \quad \Delta l_3 = \frac{F_0 l}{12AE}.$$

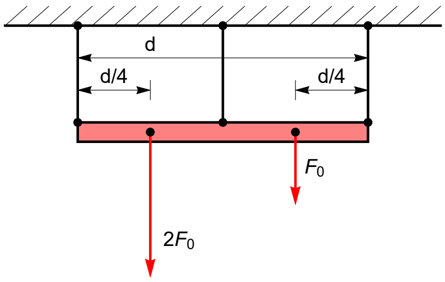
Iskane sile so

$$F_1 = \frac{7F_0}{12}, \quad F_2 = \frac{F_0}{3}, \quad F_3 = \frac{F_0}{12}.$$

7.1.2 Dodatne naloge

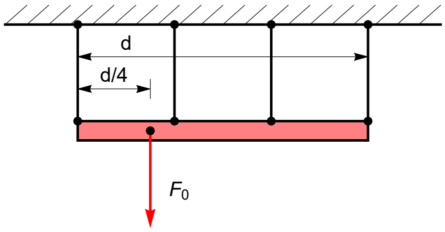
1. S stropa je na treh žici obešen togi nosilec dolžine d, glej sliko. Žice so enako dolge, imajo enak presek A, Youngovi moduli pa so $E_1 = E_0$, $E_2 = 2E_0$, $E_3 = E_0$. Za obremenitev na skici določi sile žic.

   Rešitev: $F_1 = F_0$, $F_2 = 3F_0/2$, $F_3 = F_0/2$.



2. S stropa je na štirih žicah obešen togi nosilec dolžine d, glej sliko. Žice so enako dolge, imajo enak presek A in Youngov modul E. Za obremenitev na skici določi sile žic.

   Rešitev: $F_1 = 19F_0/40$, $F_2 = 13F_0/40$, $F_3 = 7F_0/40$, $F_4 = F_0/40$.

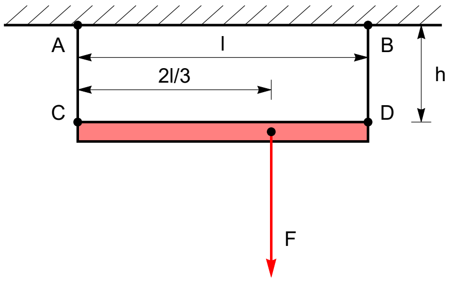


7.2 Statično določene naloge

1. S stropa je na dve žici obešen togi nosilec dolžine l, glej sliko. Žici s krožnim presekom sta enako dolgi, imata enak Youngov modul E, leva žica ima polmer preseka r_1, desna pa r_2. Za obremenitev na skici :

   (a) izračunaj sili žic;

   (b) določi polmer r_2 tako, da bo nosilec vodoraven.



   Rešitev:

   (a) Označimo z F_{A} silo leve žice, z F_{B} pa silo desne. Uporabimo momentno enačbo s polom v levem in desnem pritrdišču. Tako dobimo $F_{\mathrm{A}} = \frac{1}{3}F$ in $F_{\mathrm{B}} = \frac{2}{3}F$.

   (b) Označimo z Δa deformacijo leve žice, z Δb pa desne. Po Hookovem zakonu je

   $$\frac{\Delta a}{h} = \frac{1}{E}\frac{F_{\mathrm{A}}}{S_{\mathrm{A}}} = \frac{F}{3\pi E r_1^2}.$$

   Podobna enačba velja za Δb. Ker nosilec po deformaciji ostane vodoraven, je $\Delta a = \Delta b$. Od tod potem sledi

   $$\Delta a = \frac{Fh}{3\pi E r_1^2} = \frac{2Fh}{3\pi E r_2^2} = \Delta b$$

in od tod $r_2 = \sqrt{2} r_1$.