Poglavje 8

Hookov zakon

8.1 Zveza med napetostjo in deformacijo

8.1.1 Rešene naloge

1. Ravninska deformacija deformira pravokotnik dimenzije $2\,\mathrm{cm} \times 1\,\mathrm{cm}$ v romboid dimenzije $2.05\,\mathrm{cm} \times 0.98\,\mathrm{cm}$ z diagonalo, ki je za $\sqrt{5}/50\,\mathrm{cm}$ daljša od prvotne diagonale pravokotnika.

   (a) Določi deformacijski tenzor.

   (b) Izračunaj ekstremalni osni deformaciji in skiciraj Mohrovo krožnico. V kateri smeri je osna deformacija največja?

   (c) Za izotropični material z $\nu = 1/5$ in $E = 120\,\mathrm{GPa}$ z uporabo Hookovega zakona določi pripadajoči napetostni tenzor.

   Rešitev:

   (a) Postavimo koordinatni sistem v smeri stranic pravokotnika in izračunajmo osni deformaciji. $\epsilon_{11} = \frac{\Delta a}{a} = 0.025 = 1/40$ in $\epsilon_{22} = \frac{\Delta b}{b} = -0.02 = -1/50$. Za izračun ϵ_{12} bomo upoštevali deformacijo v smeri diagonale, ki je

   $$\epsilon_d = \frac{d + \Delta d - d}{d} = \frac{1}{50} = 0.02.$$

   Uporabimo sedaj formulo

   $$\epsilon_d = \frac{1}{2}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + \frac{1}{2}(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})\cos 2\varphi + \epsilon_{12}\sin 2\varphi,$$

   kjer je φ kot med osjo x in diagonalo pravokotnika. Potem $\cos\varphi = 2/\sqrt{5}$ in $\sin\varphi = 1/\sqrt{5}$. Od tod $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = 3/5$ in $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi = 4/5$. Tako dobimo enačbo

   $$\frac{1}{50} = \frac{1}{400} + \frac{27}{1000} + \epsilon_{12}\frac{4}{5}$$

   in od tod $\epsilon_{12} = 1/20 = 0.05$. Deformacijski tenzor je tako enak

   $$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} 1/40 & 1/200 \\ 1/200 & -1/50 \end{bmatrix}.$$

(b) Ekstremalni deformaciji sta po formuli

$$\epsilon_{\mathrm{ext}} = \frac{1}{2}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})\right)^2 + \epsilon_{12}^2}$$

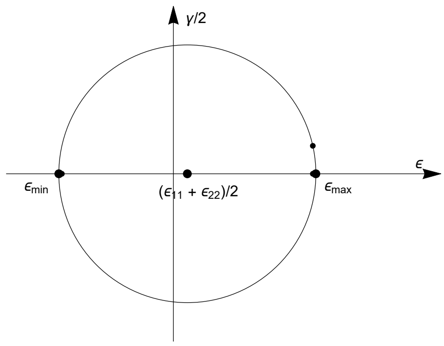
enaki

$$\epsilon_{\max} = \frac{1}{400}(1 + \sqrt{85}) \doteq 0.0255 \quad \epsilon_{\min} = \frac{1}{400}(1 - \sqrt{85}) \doteq -0.0206.$$

Smer maksimalne osne deformacije dobimo po formuli

$$\tan 2\varphi = \frac{2\epsilon_{12}}{\epsilon_{11} - \epsilon_{22}} = \frac{2}{9}.$$

Potem $\varphi = 6.26°$. Iz skice Mohrove krožnice vidimo, da je to smer ekstremalne osne deformacije.



Slika 8.1: Slika Mohrove krožnice.

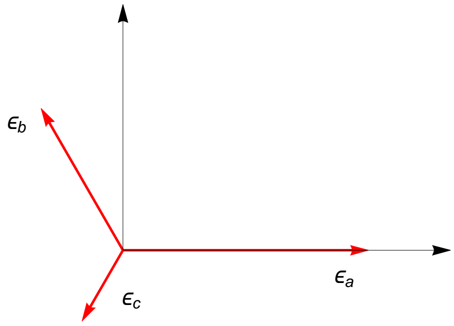
(c) Napetostni tenzor je

$$\underline{\underline{t}} = 2\mu\underline{\underline{\epsilon}} + \lambda\,\mathrm{Sl}\left(\underline{\underline{\epsilon}}\right)\,\underline{\underline{I}},$$

kjer sta μ in λ Lamejeva koeficienta dana z $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ in $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$. Njuni vrednosti sta $\mu = 50\,\mathrm{GPa}$ in $\lambda = 100/3\,\mathrm{GPa}$. Potem

$$\underline{\underline{t}} = \begin{bmatrix} 8/3 & 1/2 \\ 1/2 & -11/6 \end{bmatrix} \mathrm{GPa}.$$

2. Z ekstenziometrom smo v smereh, ki med seboj oklepajo kot $2\pi/3$, glej skico, izmerili osne deformacije $\epsilon_\mathrm{a} = 0.003$, $\epsilon_\mathrm{b} = 0.002$ in $\epsilon_\mathrm{c} = 0.001$.



   (a) Določi infinitezimalni deformacijski tenzor.

   (b) Naj bo deformiran material izotropičen z Youngovim modulom $E = 210\,\mathrm{GPa}$ in Poissonovim količnikom $\nu = 0.2$. Za po prvi točki izračunano ravninsko deformacijo določi pripadajoči napetostni tenzor. Tu upoštevaj, da je

$$\underline{\underline{t}} = \frac{E}{1+\nu}\,\underline{\underline{\epsilon}} + \frac{\nu E\,\mathrm{Sl}\left(\underline{\underline{\epsilon}}\right)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\,\underline{\underline{I}}.$$

Rešitev:

(a) Ker je osna napetost v smeri osi x enaka ϵ_a, je $\epsilon_{11} = 2\times 10^{-3}$. Enotski vektor v smer osne deformacije ϵ_b je $\vec{e}_\mathrm{b} = \cos 2\pi/3\,\vec{\imath} + \sin 2\pi/3\,\vec{\jmath} = -\frac{1}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}$, v smeri ϵ_c pa $\vec{e}_\mathrm{c} = -\frac{1}{2}\vec{\imath} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}$. Zapišimo tenzor deformacije

$$\underline{\underline{\epsilon}} = 10^{-3}\begin{bmatrix} 3 & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix}.$$

Neznanki β in γ določimo iz pogojev

$$\vec{e}_\mathrm{b}\cdot\left(\underline{\underline{\epsilon}}\vec{e}_\mathrm{b}\right) = \epsilon_\mathrm{b} \qquad \vec{e}_\mathrm{c}\cdot\left(\underline{\underline{\epsilon}}\vec{e}_\mathrm{c}\right) = \epsilon_\mathrm{c}.$$

Tako dobimo enačbi

$$2\sqrt{3}\beta - 3\gamma = -5 \qquad 2\sqrt{3}\beta + 3\gamma = 1.$$

Rešitvi sta $\beta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ in $\gamma = 1$. Potemtakem je

$$\underline{\underline{\epsilon}} = 10^{-3}\begin{bmatrix} 3 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Uporabimo dano formulo. Izrčunajmo posebej

$$\frac{E}{1+\nu} = 175\,\mathrm{GPa},$$

$$\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{175}{3}\mathrm{GPa},$$

in $\mathrm{Sl}\left(\underline{\underline{\epsilon}}\right) = 4\times 10^{-3}$. Tako dobimo

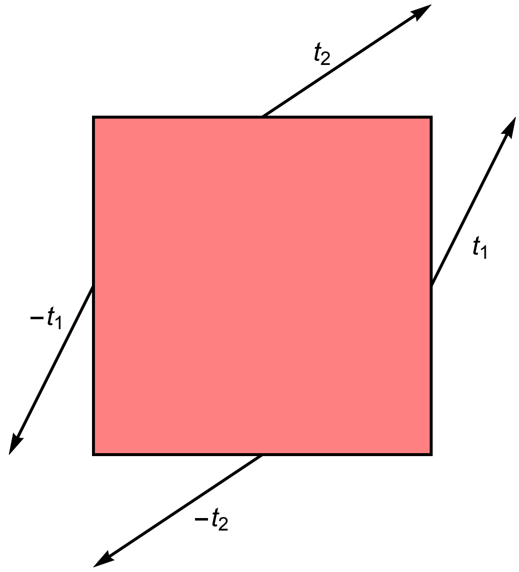
$$\underline{\underline{t}} = 175\,\mathrm{MPa}\left(\begin{bmatrix} 3 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{4}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 175\,\mathrm{MPa}\begin{bmatrix} \frac{13}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{7}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

3. Kvadrat na sliki ima na stranicah napetosti $\vec{t_1}$, ki ima velikost $\frac{\sqrt{5}}{4}$MPa in $\vec{t_2} = \left(\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j}\right)$ MPa.

   (a) Določi $\vec{t_1}$ in pripadajoči napetostni tenzor.

   (b) Privzemi, da se kvadrat elastično deformira. Izračunaj pripadajoči deformacijski tenzor, če je iz izotropičnega materiala in je $E = 120\,\text{GPa}$ in $\nu = 1/3$.

   (c) Določi pripadajoče ekstremalne osne deformacije.



Rešitev:

(a) Vektor $\vec{t_2}$ je drugi stolpec matrike napetostnega tenzorja. Ker je simetričen, je oblike

$$\underline{\underline{t}} = \begin{bmatrix} x & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix} \text{MPa}.$$

Določiti moramo še x. Vektor napetosti $\vec{t_1}$ je prvi stolpec napetostnega tenzorja. Torej $\vec{t_1} = \left(x\vec{i} + \frac{1}{4}\vec{j}\right)$ MPa. Ker je $|\vec{t_1}| = \frac{\sqrt{5}}{4}$MPa, je $x^2 + \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$ in tako $x = \frac{1}{4}$. Torej

$$\underline{\underline{t}} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix} \text{MPa}.$$

(b) Deformacija je dana s Hookovim zakonom

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{t}} - \frac{\nu}{E}\text{Sl}(\underline{\underline{t}})\underline{\underline{I}} = \left(\frac{1}{90}\begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix} - \frac{1}{360}\frac{7}{12}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\frac{\text{MPa}}{\text{GPa}}$$

Od tod po krajšem računu

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} 1.16 & 5.56 \\ 5.56 & 2.08 \end{bmatrix} 10^{-6}$$

(c) Ekstremalne osne deformacije dobimo po formuli

$$\epsilon^{\max,\min} = \frac{1}{2}\left(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} \pm \sqrt{(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})^2 + \gamma_{12}^2}\right) = \frac{1}{2}\left(3.24 \pm \sqrt{0.92^2 + 11.12^2}\right) 10^{-6}$$

Tako dobimo $\epsilon^{\max} = 7.2010^{-6}$ in $\epsilon^{\min} = -3.95010^{-6}$.

4. Pokaži, da se za izotropičen material smeri ekstremalne osne deformacije ujemajo s smermi ekstremalnih normalnih napetosti. Privzemi, da je deformacija ali napetost ravninska.

Rešitev: Privzemimo ravninsko deformacijo. Smer ekstremalne osne deformacije je dana s formulo

$$\varphi^1 = \frac{1}{2}\arctan\frac{2\epsilon_{12}}{\epsilon_{11} - \epsilon_{22}}, \qquad \varphi^2 = \varphi^1 + \pi/2.$$

Po Hookovem zakonu

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{E}t_{11} - \frac{\nu}{E}t_{22}, \quad \epsilon_{22} = -\frac{\nu}{E}t_{11} + \frac{1}{E}t_{22}, \quad \epsilon_{12} = \frac{1}{2G}t_{12}.$$

Potem

$$\epsilon_{11} - \epsilon_{22} = \frac{1+\nu}{E}\left(t_{11} - t_{22}\right).$$

Upoštevajmo še, da je $G = E/(2(1+\nu))$. Potem

$$\frac{1}{2}\arctan\frac{2\epsilon_{12}}{\epsilon_{11}-\epsilon_{22}} = \frac{1}{2}\arctan\frac{2t_{12}}{t_{11}-t_{22}}$$

in ekstremalne smeri se res ujemajo.

5. V treh smereh, ki oklepajo medsebojni kot $\pi/4$ izmerimo osne deformacije $\epsilon_{\mathrm{a}} = 10^{-3}$, $\epsilon_{\mathrm{b}} = -3/2 \times 10^{-3}$ in $\epsilon_{\mathrm{c}} = 2 \times 10^{-3}$ in pripadajoči normalni napetosti $\sigma_{\mathrm{a}} = 240\mathrm{MPa}$ in $\sigma_{\mathrm{b}} = 0\mathrm{MPa}$. Material je izotropičen, deformacija pa je ravninska. Določi E, ν in μ.

Rešitev: V prvem koraku iz podatkov določimo deformacijski tenzor. Postavimo koordinatni sistem tako, da se smeri podane osne deformacije ujemata s koordinatnima osema, tretja pa je v smeri diagonale. Potem je

$$\underline{\underline{\epsilon}} = 10^{-3}\begin{bmatrix} 1 & x \\ x & 2 \end{bmatrix}\mathrm{MPa},$$

kjer je x še neznano število. V smeri diagonale je

$$-3/2 \times 10^{-3} = \epsilon_{\mathrm{b}} = \frac{1}{2}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + \frac{1}{2}(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})\cos\pi/2 + \epsilon_{12}\sin\pi/2 = 10^{-3}\left(3/2 + x\right).$$

Tako dobimo $\epsilon_{12} = -3 \times 10^{-3}$.

Napetostni tenzor je dan s Hookovim zakonom

$$\underline{\underline{t}} = 2\mu\underline{\underline{\epsilon}} + \lambda\,\mathrm{Sl}(\underline{\underline{\epsilon}})\underline{\underline{I}} = 10^{-3}\begin{bmatrix} 2\mu + 3\lambda & -6\mu \\ -6\mu & 4\mu + 3\lambda \end{bmatrix}\mathrm{MPa}.$$

Podani normalni napetosti sta v smereh $\vec{\imath}$ in $\vec{\imath} + \vec{\jmath}$. Potem je

$$\begin{aligned} 240\mathrm{MPa} &= \sigma_{\mathrm{a}} = 10^{-3}\left(2\mu + 3\lambda\right) \\ 0\mathrm{MPa} &= \sigma_{\mathrm{b}} = 3 \times 10^{-3}\left(\lambda - \mu\right). \end{aligned}$$

Od tod sledi $\lambda = \mu = 48\,\mathrm{GPa}$. Iz formul

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \qquad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

tako dobimo

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \qquad \nu = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$

in od tod $E = 120\,\mathrm{GPa}$ in $\nu = 1/4$.