Naloge iz vaj: Kinematika in dinamika

1 Premočrtno gibanje

1.1 Rešene naloge

1. Točka se giblje premočrtno po osi x. V času od 0 do t_1 se giblje s konstantno brzino v_1, v času od t_1 do t_2 enakomerno zavira tako, da ima v času t_2 trenuto brzino nič.

   (a) Izračunaj do kod pride v času t_1.

   (b) Izračunaj pospešek zaviranja.

   (c) Do kod pride v času t_2?

   (d) Kdaj se vrne v začetni položaj?

   (e) Izračunaj za konkretne vrednosti $v_1 = 2\,\mathrm{m/s}$, $t_1 = 10\,\mathrm{s}$, $t_2 = 20\,\mathrm{s}$. Nariši tudi grafe pospeška, hitrosti in položaja v odvisnosti od časa.

   Rešitev: Poglejmo prvo kako je s pospeškom. Pospešek je od $t = 0$ do $t = t_1$ enak nič, ker je gibanje enakomerno, na intervalu (t_1, t_2) in naprej do t_3, ko se točka vrne v začetni položaj, pa je pospešek konstanten in ima vrednostjo a_2. Kolikšna je njena vrednostše ne vemo, vemo pa da je negativna, saj točka zavira. Na intervalu $(0, t_1)$ je hitrost konstantna in enaka v_1, nato pa od t_1 naprej linearno poda, saj točka enakomerno zavira. Njen linearni potek je natanko določen, saj vemo, da je $v(t_1) = v_1$ in $v(t_2) = 0$. Od tod sledi, da je

   $$v(t) = \frac{v_1(t-t_2)}{t_1-t_2} \qquad t > t_1.$$

   Odvod hitrosti je pospešek in tako $a_2 = -v_1/(t_2 - t_1) = -0.2\,\mathrm{m/s^2}$. Postavimo začetni položaj točke v $x = 0$. Ker je hitrost na $(0, t_1)$ konstantna, na tem intervalu velja $x = v_1 t$, x torej narašča linearno in tako velja $x(t = t_1) = v_1 t_1 = 20\,\mathrm{m}$. Za $t > t_1$ je gibanje enakomerno pospešeno, zato je x kvadratna funkcija časa. Ker poznamo položaj in hitrost za $t = t_1$ zapišemo x v obliki

   $$x = \frac{1}{2}a_2(t-t_1)^2 + v_1(t-t_1) + v_1 t_1.$$

   Potem

   $$x(t_2) = -\frac{v_1(t_2-t_1)^2}{2(t_2-t_1)} + v_1(t_2-t_1) + v_1 t_1 = \frac{1}{2}v_1(t_1+t_2) = 60\,\mathrm{m}.$$

   Kdaj se vrne v začetni položaj, dobimo iz enačbe

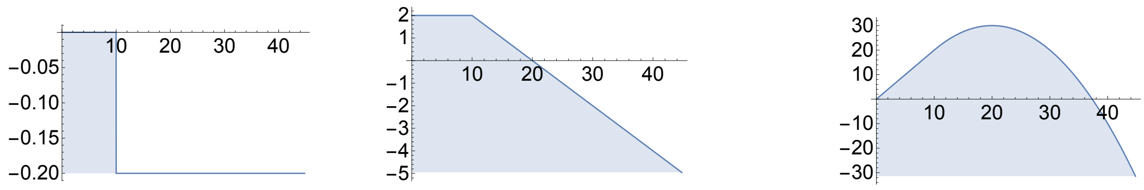
   $$0 = \frac{1}{2}a_2(t_3-t_1)^2 + v_1(t_3-t_1) + v_1 t_1.$$

   Dobili smo kvadratno enačbo za t_3. Za lažje reševanje vpeljimo novo neznanko $\tau = t_3 - t_1$. Potem $0 = \frac{1}{2}a_2\tau + v_1\tau + v_1 t_1$ in tako

   $$\tau_{1,2} = \frac{-v_1 \pm \sqrt{v_1^2 - 2a_2 v_1 t_1}}{a} = \frac{t_2-t_1}{v_1}\left(v_1 \pm \sqrt{v_1^2 + 2v_1^2 t_1/(t_2-t_1)}\right) = (t_2 - t_1)\left(1 \pm \sqrt{\frac{t_1+t_2}{t_2-t_1}}\right).$$

   Pravi predznak je + in tako

   $$t_3 = t_1 + \tau = t_1 + (t_2-t_1)\left(1 \pm \sqrt{\frac{t_1+t_2}{t_2-t_1}}\right) = 10(2+\sqrt{3})\mathrm{s}.$$



Slika 1: Pospešek, hitrost in polžaj.

2. Od časa $t = 0$ do $t = t_1$ se točka giblje enakomerno pospešeno s pospeškom a. V trenutku $t = t_1$ pričnemo zavirati. Določi pospešek zaviranja tako, da se točka v času $2t_1$ vrne v začetni položaj. Določi tudi do kod najdlje pride točka.

   Rešitev: Označimo z x koordinato premočrtnega gibanja. Za $t \in [0, t_1]$ je enačba gibanja $x = \frac{1}{2}at^2$. Položaj točke v času t_1 je $x_1 = \frac{1}{2}at_1^2$, hitrost pa je $v_1 = at_1$. Od t_1 naprej se točka prav tako giblje enakomerno pospešeno, tokrat s pospeškom a_1. Ker je za drugi del gibanja začetni položaj v času t_1 enak x_1, začetna hitrost pa v_1, je enačba gibanja

   $$x = x(t) = \frac{1}{2}a_1(t - t_1)^2 + v_1(t - t_1) + x_1 = \frac{1}{2}a_1(t - t_1)^2 + at_1(t - t_1) + \frac{1}{2}at_1^2.$$

   Točka se v času $t = 2t_1$ vrne v začetni položaj. Velja torej $0 = x(2t_1) = \frac{1}{2}a_1t_1^2 + at_1^2 + \frac{1}{2}at_1^2$. Od tod potem sledi $a_1 = -3a$. Vidimo, da je pospešek zaviranja neodvisen od časa t_1.

   Poglejmo še, do kod pride točka. Točka se prične gibati nazaj v točki obrata gibanja, ki je določena z enačbo $0 = v = \dot{x}(t_2)$. Izračunajmo $\dot{x} = -3a(t - t_1) + at_1 = a(4t_1 - 3t)$. Tako dobimo $t_2 = \frac{4}{3}t_1$ in po krajšem računu $x_{\max} = \frac{2}{3}at_1^2$.

3. Dve točki se gibljeta ena proti drugi. Določi kdaj in kje se srečata, če sta v začetnem trenutku oddaljeni za d in je:

   (a) točki se gibljeta enakomerno z brzinama v_1 in v_2;

   (b) ena točka se giblje enakomerno z brzino v_1 druga pa enakomerno pospešeno s pospeškom a_2.

   Naredi izračun za konkretne vrednosti $d = 1\,\mathrm{m}$, $v_1 = 2\,\mathrm{cm/s}$, $v_2 = 3\,\mathrm{cm/s}$ in $a_2 = 2\,\mathrm{m/s^2}$.

   Rešitev:

   (a) V prvem primeru je pogoj srečanja $v_1t = d - v_2t$. Od tod sledi $t = d/(v_1 + v_2)$ in točki se srečata v oddaljenosti $dv_1/(v_1 + v_2)$ od začetnega položaja prve točke. Za dane vrednosti je čas srečanja $t = 20\,\mathrm{s}$, razdalja pa $40\,\mathrm{cm}$.

   (b) Sedaj je pogoj srečanja $v_1t = d - \frac{1}{2}a_2t^2$. Dobili smo kvadratno enačbo za t. Rešitev je

   $$t_{1,2} = \frac{1}{a_2}\left(-v_1 \pm \sqrt{v_1^2 + 2a_2d}\right).$$

   Prava rešitev je dana z vsoto. Za dane vrednosti je

   $$t = \frac{1}{2}\left(-2 10^{-2} + \sqrt{4 10^{-4} + 4}\right)\mathrm{s} \doteq (-10^{-2} + 1)\mathrm{s} = 0.99\,\mathrm{s}.$$

   Prepotovana razdalja prve točke pa je $v_1t \doteq 1.98\,\mathrm{cm}$.

1.2 Dodatne naloge

1. Točka se giblje premočrtno po osi x. V času od 0 do t_1 se giblje enakomerno pospešeno s pospeškom a_1, v času od t_1 do t_2 pa nato enakomerno zavira tako, da ima v času t_2 trenuto brzino nič.

   (a) Izračunaj do kod pride v času t_1.

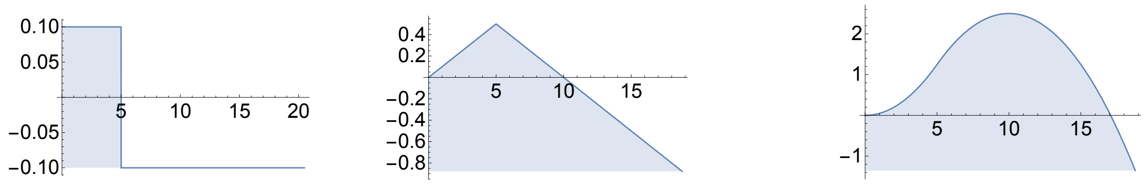
   (b) Izračunaj pospešek zaviranja a_2.

   (c) Do kod pride v času t_2?

   (d) Kdaj se vrne v začetni položaj?

   (e) Izračunaj za konkretne vrednosti $a_1 = 1/10\,\mathrm{m/s^2}$, $t_1 = 5\,\mathrm{s}$, $t_2 = 10\,\mathrm{s}$. Nariši tudi grafe pospeška, hitrosti in položaja v odvisnosti od časa.

   Rešitev: $x_1 = \frac{1}{2}a_1t_1^2$, $a_2 = -\frac{a_1t_1}{t_2-t_1}$, $x_2 = \frac{1}{2}a_1t_1t_2$, $t_3 = t_2 + \sqrt{t_2(t_2-t_1)}$.



Slika 2: Pospešek, hitrost in polžaj.

2. Točka se giblje premočrtno po osi x. V času od 0 do t_1 se giblje enakomerno pospešeno s pospeškom a_1, v času od t_1 do t_2 pa nato enakomerno zavira tako, da se v času t_2 vrne v začetni položaj.

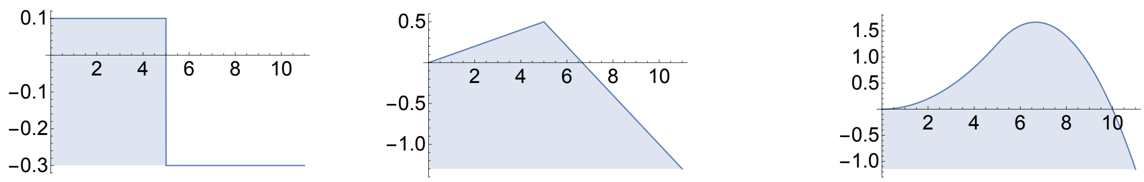
   (a) Izračunaj do kod pride v času t_1.

   (b) Izračunaj pospešek zaviranja a_2.

   (c) Določi do kod najdlje pride točka.

   (d) Izračunaj za konkretne vrednosti $a_1 = 1/10\,\mathrm{m/s^2}$, $t_1 = 5\,\mathrm{s}$, $t_2 = 10\,\mathrm{s}$. Nariši tudi grafe pospeška, hitrosti in položaja v odvisnosti od časa.

   Rešitev: $x_1 = \frac{1}{2}a_1t_1^2$, $a_2 = -\frac{a_1t_1(2t_2-t_1)}{(t_2-t_1)^2}$, $t_3 = \frac{(a_2-a_1)t_1}{a_2}$, $x_{\max} = \frac{a_1t_1t_2^2}{2(2t_2-t_1)}$.



Slika 3: Pospešek, hitrost in polžaj.

2 Dinamika točke

2.1 Rešene naloge

1. Obravnavaj prosti pad:
   (a) brez upoštevanja upora zraka;
   (b) z upoštevanjem upora zraka.

Rešitev: Postavimo os x v smeri sile teže z izhodiščem v začetnem položaju. Če točka v začetnem trenutku nima komponente brzine pravokotne na smer navpičnice, je gibanje premočrtno in lahko namesto vektorske oblike Newtonove enačbe uporabimo skalarno enačbo $m\ddot{x} = f$, kjer je f rezultanta vseh sil. V našem primeru točko spustimo v prosti pad. Začetna hitrost je enaka nič in gibanje je premočrtno.

(a) V primeru braz upoštevanja sile upora deluje na materialno točko samo sila teže $f = mg$. Newtonova enačba je se tako glasi $m\ddot{x} = mg$ oziroma $\ddot{x} = g$. Potem je $\dot{x} = gt + C_1$, kjer je C_1 integracijska konstanta, ki jo določa začetni pogoj. Ker je $\dot{x}(t = 0) = 0$, je $C_1 = 0$. Položaj dobimo še z eno integracijo. Dobimo $x = \frac{1}{2}gt^2 + C_2$. Ker je $x(t = 0) = 0$, je $C_2 = 0$ in tako $x = \frac{1}{2}gt^2$. Vidimo, da je gibanje natanko določeno z Newtonovo enačbo in začetnima pogojema, ki določata integracijski konstanti C_1 in C_2. Iz dobljene enačbe gibanja sledi, da hitrost narašča brez meje, saj je $\dot{x} = gt$.

(b) Sedaj obravnavajmo gibanje z uporom zraka. Ker točko spustimo, je začetna hitrost nič in zato uporabimo linearen zakon upora $F_\mathrm{u} = -k\dot{x}$, kjer je k koeficient upora. Njegova enota je kg/s. Enačba gibanja je $m\ddot{x} = mg - k\dot{x}$. Enačbo delimo z m in označimo $\gamma = k/m$. Tako dobimo $\ddot{x} = g - \gamma\dot{x}$, oziroma

$$\dot{v} = g - \gamma v, \tag{1}$$

kjer je $v = \dot{x}$. Dobili smo linearno diferencialno enačbo prvega reda za v. Iščemo njeno splošno rešitev, ki bo odvisna od dveh integracijskih konstant. Posebno, pravimo ji tudi partikularna rešitev, rešitev enačbe (1) znamo poiskati. Vprašajmo se, ali konstantna funkcija $v = v_1$ reši (1)? Vidimo, da jo reši, če je $v_1 = g/\gamma$. Pišimo $v_0 = v - v_1$ in poglejmo kakšni enačbi zadošča v_0, če v reši (1). Izračunajmo

$$\dot{v} = \dot{v}_0 + \dot{v}_1 = \dot{v}_0 = g - \gamma v = g - \gamma v_0 - \gamma v_1 = \gamma v_0.$$

Vidimo, da je $v = v_0 + v_1$ rešitev (1), če je v_0 rešitev enačbe

$$\dot{v}_0 = -\gamma v_0.$$

Dobljeno enačbo znamo rešiti. Rešitev je $v_0 = C_1 \,\mathrm{e}^{-\gamma t}$ in tako

$$v = v_0 + v_1 = C_1 \,\mathrm{e}^{-\gamma t} + g/\gamma.$$

Iz začetnega pogoja $v(0) = 0$ sledi, da je $C_1 = -g/\gamma$ in tako

$$v = \frac{g}{\gamma}\left(1 - \mathrm{e}^{-\gamma t}\right). \tag{2}$$

V primeru z uporom zraka hitrost ne narašča več linearno. Še več hitrost ne narašča brez meja, je navzgor omejena z $\frac{g}{\gamma}$, saj je $\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-\gamma t} = 0$. Položaj dobimo z integracijo brzine. Iz (2) sledi

$$x = \frac{g}{\gamma}t + \frac{g}{\gamma^2}\,\mathrm{e}^{-\gamma t} + C_2.$$

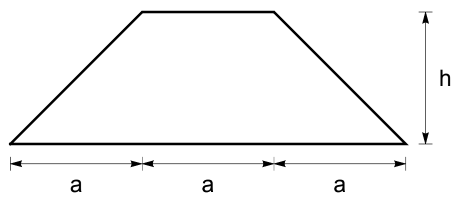
Konstanto C_2 določa začetni pogoj $x(t = 0) = 0$. Od tof $C_2 = -g/\gamma^2$ in

$$x = \frac{g}{\gamma}t + \frac{g}{\gamma^2}\left(\mathrm{e}^{-\gamma t} - 1\right).$$

3 Sistem materialnih točk

3.1 Rešene naloge

1. Določi masno središče trapeza na skici.



Slika 4: Trapez.

(a) Trapez obravnavaj kot sestavljen lik iz dveh trikotnikov in pravokotnika.

(b) Trapez obravnavaj kot trikotnik brez vršnega trikotnika.

Rešitev:

(a) Lik je sestavljen iz treh likov, levi trikotnik, pravokotnik in desni trikotnik. Koordinatno os x postavimo v smeri osnovnice, koordinatno središče pa tako, da je os y os zrcalne simetrije. Potem je očitno $x_* = 0$, y_* pa izračunamo s pomočjo tabele

Lik	A	y_*
Levi trikotnik	$\frac{1}{2}ah$	$\frac{1}{3}h$
Pravokotnik	ah	$\frac{1}{2}h$
Desni trikotnik	$\frac{1}{2}ah$	$\frac{1}{3}h$

Ploščina trapeza je potem vsota ploščin $A = 2ah$, masno središče pa je

$$y_* = \frac{1}{2ah}\left(\frac{1}{6}ah^2 + \frac{1}{2}ah^2 + \frac{1}{6}ah^2\right) = \frac{5}{12}h.$$

(b) Stranici trapeza podaljšamo do skupnega presečišča. Tako dobimo trikotnik z višino $\frac{3}{2}h$, trapez pa je dan kot razlika tega trikotnika in trikotnika na trapezu. Sestavimo tabelo

Lik	A	y_*
Veliki trikotnik	$\frac{9}{4}ah$	$\frac{1}{2}h$
Mali trikotnik	$\frac{1}{4}ah$	$\frac{7}{6}h$

Ploščina trapeza je potem razlika ploščin, torej $A = \frac{9}{4}ah - \frac{1}{4}ah = 2ah$, masno središče pa je

$$y_* = \frac{1}{2ah}\left(\frac{9}{8}ah^2 - \frac{7}{24}ah^2\right) = \frac{h}{16}\left(9 - \frac{7}{3}\right) = \frac{5}{12}h.$$