

# Poglavje 8

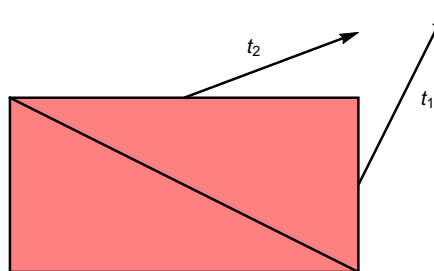
## Napetost

### 8.1 Ravninska napetost

#### 8.1.1 Rešene naloge

1. Pravokotnik s stranicami v razmerju 2 : 1, glej skico, ima na stranicah napetosti  $\vec{t}_2 = \left(\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{4}\vec{j}\right) 30 \text{ MPa}$  in  $\vec{t}_1$ , ki ima velikost  $10\sqrt{5} \text{ MPa}$ .

- (a) Dopolni sliko z vektorjema napetosti na preostalih dveh stranicah.
- (b) Določi  $\vec{t}_1$  in pripadajoči napetostni tenzor.
- (c) Izračunaj polmer Mohrove krožnice.
- (d) Določi normalno in strižno napetost na označeno diagonalo pravokotnika.



#### Rešitev:

- (a) Dopolnjena skica napetosti je
- (b) Ker je  $\vec{t}_2 = \underline{t}\vec{j}$ , je

$$\underline{t} = \begin{bmatrix} t_{11} & 2/3 \\ 2/3 & 1/4 \end{bmatrix} 30 \text{ MPa.}$$

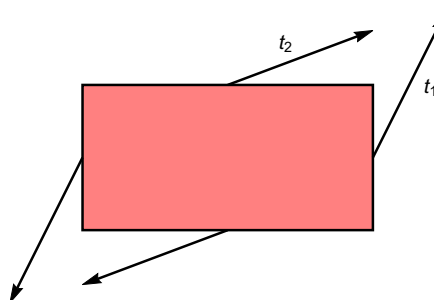
Potem je  $\vec{t}_1 = \underline{t}\vec{i} = (t_{11}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j}) 30 \text{ MPa}$  in

$$|\vec{t}_1|^2 = \left(t_{11}^2 + \frac{4}{9}\right) 900 \text{ MPa}^2 = 500 \text{ MPa}^2$$

in od tod  $t_{11} = 10 \text{ MPa}$ .

- (c) Polmer Mohrove krožnice je

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}(t_{11} - t_{22})\right)^2 + t_{12}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{24}\right)^2 + \frac{4}{9}} 30 \text{ MPa} = \frac{5}{4}\sqrt{257} = 20.04 \text{ MPa.}$$



- (d) Vektor v smeri diagonale je  $2\vec{i} + \vec{j}$ . Potem je normala na diagonalo  $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-\vec{i} + 2\vec{j})$ . Vektor napetosti na ravnino v smeri diagonale je

$$\vec{t} = \underline{t}\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} 30 \text{ MPa} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 30 \\ -5 \end{bmatrix} \text{ MPa} = \sqrt{5} \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

Normalna napetost je tako

$$t_n = \vec{n} \cdot \vec{t} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 30 \\ -5 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} 30 \text{ MPa} = -8 \text{ MPa}.$$

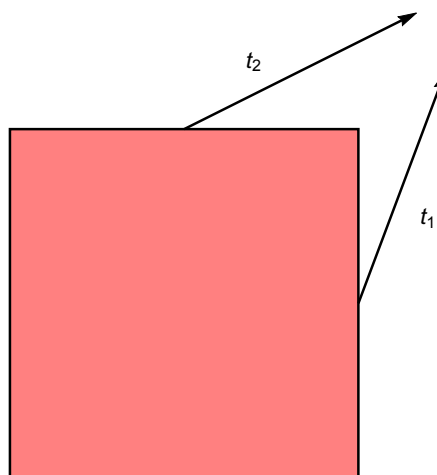
Strižna napetost je  $\tau = \sqrt{|\vec{t}|^2 - t_n^2}$ . Izračunajmo posebej

$$|\vec{t}| = \sqrt{185} \text{ MPa}.$$

Potem  $\tau = 11 \text{ MPa}$ .

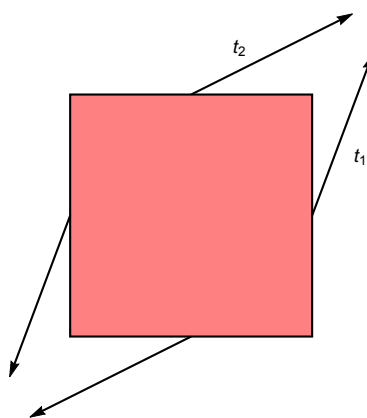
2. Kvadrat na sliki ima na stranicah napetosti  $\vec{t}_2 = \left(\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j}\right) \text{ MPa}$  in  $\vec{t}_1$ , ki ima velikost  $\frac{\sqrt{73}}{12} \text{ MPa}$ .

- Dopolni sliko z vektorjema napetosti na preostalih dveh stranicah.
- Določi  $\vec{t}_2$  in pripadajoči napetostni tenzor.
- Skiciraj Mohrovo krožnico.
- Določi normalno in strižno napetost na diagonali kvadrata.



### Rešitev:

- (a) Dopolnjena slika je



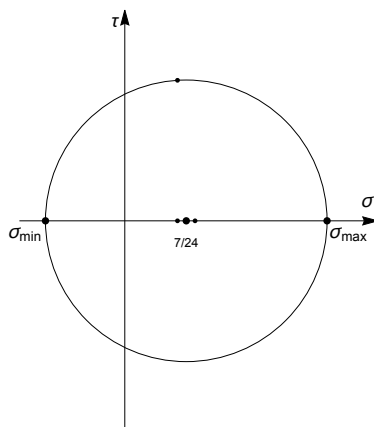
- (b) Tenzor napetosti je oblike

$$\underline{t} = \begin{bmatrix} t_{11} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Neznano komponento  $t_{11}$  dobimo iz pogoja, da je  $|\underline{t}\underline{\vec{i}}| = \frac{\sqrt{73}}{12}$ . Potem  $t_{11}^2 + \frac{4}{9} = \frac{73}{144}$  in tako  $t_{11} = \pm \frac{1}{4}$ . Iz skice sledi, da je  $t_{11} = \frac{1}{4}$ . Potemtakem

$$\underline{t} = \begin{bmatrix} 1/4 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

(c) Skica Mohrove krožnice je



(d) Na diagonali z normalo  $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$  je vektor napetosti enak  $\vec{t} = \underline{t}\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{11}{12}\vec{i} + \vec{j})$  MPa.

Normalna napetost je  $t_n = \vec{t} \cdot \vec{n} = \frac{23}{24}$  MPa. Strižna napetost pa  $t_s = \sqrt{|\vec{t}|^2 - t_n^2} = \frac{1}{24}$  MPa.

3. V danem koordinatnem sistemu ima napetostni tenzor ravninskega napetostnega stanja komponente  $t_{11} = \sigma$ ,  $t_{12} = \sqrt{3}\sigma$  in  $t_{22} = 3\sigma$ . Poišči tak koordinatni sistem, da bo pripadajoča matrika komponent napetostnega tenzorja diagonalna in izračunaj diagonalna elementa.

**Rešitev:** Pri rotaciji danega koordinatnega sistema za kot  $\varphi$  okrog osi  $\vec{k}$  ima napetostni tenzor komponente

$$\begin{aligned} t'_{11} &= \frac{1}{2}(t_{11} + t_{22}) + \frac{1}{2}(t_{11} - t_{22}) \cos 2\varphi + t_{12} \sin 2\varphi = \sigma (\sqrt{3} \sin 2\phi - \cos 2\phi + 2) \\ t'_{22} &= \frac{1}{2}(t_{11} + t_{22}) - \frac{1}{2}(t_{11} - t_{22}) \cos 2\varphi - t_{12} \sin 2\varphi = \sigma (-\sqrt{3} \sin 2\phi + \cos 2\phi + 2) \\ t'_{12} &= -\frac{1}{2}(t_{11} - t_{22}) \sin 2\varphi + t_{12} \cos 2\varphi = \sigma (\sin 2\phi + \sqrt{3} \cos 2\phi). \end{aligned}$$

Zahtevamo  $t'_{12} = 0$ . Od tod

$$\sin 2\phi + \sqrt{3} \cos 2\phi = 0.$$

Enačba ima dve rešitvi,  $\varphi = -\pi/6$  in  $\varphi = \pi/3$ . V prvem primeru je  $t'_{11} = 0$  in  $t'_{22} = 4\sigma$ , v drugem pa  $t'_{11} = 4\sigma$  in  $t'_{22} = 0$ .

4. Pokaži, da je ravninsko napetostno stanje enoosno natanko takrat, ko je  $\det \underline{t} = 0$ .

**Rešitev:** Napetostno stanje je enoosno, če obstaja tak koordinatni sistem, da so vse komponente, razen komponente  $t_{11}$  napetostnega tenzorja enake nič. Ker je napetostno stanje

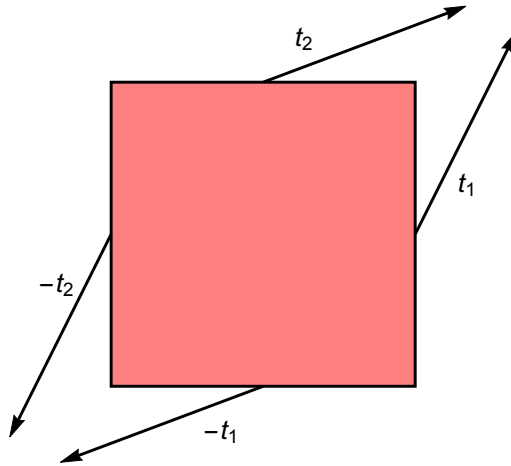
ravninsko, je  $t_{13} = t_{23} = t_{33} = 0$ . Nadalje, če usmerimo kordinatni sistem v smeri ekstremalnih normalnih napetosti, je  $t_{12} = 0$ , daigonalna elementa pa sta enaka ekstremalnima normalnima napetostima. Ekstremalni napetosti sta

$$\sigma_{ext} = \frac{1}{2} \left( t_{11} + t_{22} \pm \sqrt{(t_{11} - t_{22})^2 + 4t_{12}^2} \right) = \frac{1}{2} \left( \text{sl } \underline{\underline{t}} \pm \sqrt{(\text{sl } \underline{\underline{t}})^2 - 4 \det \underline{\underline{t}}} \right).$$

Privzemimo  $\text{sl } \underline{\underline{t}} \geq 0$ . Potem je  $\sigma_{min} = 0$  natanko tedaj, ko je  $\det \underline{\underline{t}} = 0$  in  $\sigma_{max} = \text{sl } \underline{\underline{t}}$ . V primeru  $\text{sl } \underline{\underline{t}} \leq 0$  pa  $\sigma_{min} = \text{sl } \underline{\underline{t}}$  in  $\sigma_{max} = 0$ .

### 8.1.2 Dodatne naloge

- Kvadrat na sliki ima na stranicah napetosti  $\vec{t}_1 = \left( \frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} \right)$  MPa in  $\vec{t}_2$ , ki ima velikost  $\frac{\sqrt{5}}{3}$  MPa.
  - Določi  $\vec{t}_2$  in pripadajoči napetostni tenzor.
  - Določi normalno in strižno napetost na obeh diagonalah kvadrata.



**Rešitev:**

(a)  $\vec{t}_2 = \left( \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} \right)$  MPa,  $\underline{\underline{t}} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  MPa.

(b) Normalni napetosti sta 1 MPa in  $-\frac{1}{3}$  MPa, strižni pa sta obe enaki nič.

- V danem koordinatnem sistemu ima napetostni tenzor ravninskega napetostnega stanja komponente  $t_{11} = \sigma$ ,  $t_{12} = \sigma$  in  $t_{22} = \sigma$ . Poišči tak koordinatni sistem, da bo pripadajoča matrika komponent napetostnega tenzorja diagonalna in izračunaj diagonalna elementa.

**Rešitev:** Kot  $\varphi = \pi/4$ , diagonalna elementa pa sta  $2\sigma$  in 0.