Naloge iz vaj: Sistem sil

1 Ravninski sistem sil

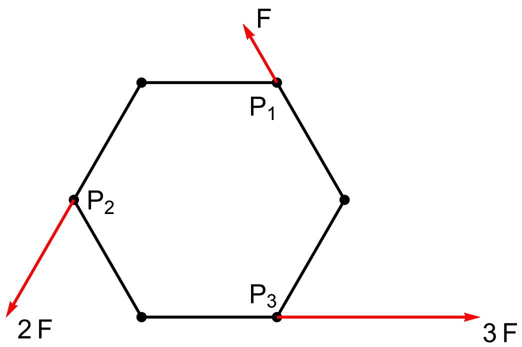
1.1 Rešene naloge

1. Pravilni šestkotnik z dolžino stranice a je obremenjen tako kot kaže slika.

   (a) Zapiši sistem sil $\mathcal{F}$.

   (b) Izračunaj rezultanto sil $\vec{R}(\mathcal{F})$ in navorov $\vec{N}(\mathcal{F}, O)$ s polom O v središču mnogokotnika.

   (c) Določi os sistema.



Rešitev:

(a) Postavimo izhodišče koordinatnega sistema v središče mnogokotnika. Prijemališča sil so potem $P_1(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2})$, $P_2(-a, 0)$ in $P_3(\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}a}{2})$, sile pa so $\vec{F}_1 = F(-\frac{1}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath})$, $\vec{F}_2 = -F(\vec{\imath} + \sqrt{3}\vec{\jmath})$ in $\vec{F}_3 = 3F\vec{\imath}$.

(b) Rezultanta sil je

$$\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = F\left(\frac{3}{2}\vec{\imath} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}\right),$$

rezultanta navorov pa je

$$\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \sum_{i=1}^{3} \vec{OP_i} \times \vec{F}_i = aF\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\vec{k} = 3\sqrt{3}aF\vec{k}.$$

Navore lahko izračunamo tudi elementarno brez uporabe vektorskega produkta. Po polznosti sile lahko vse sile pomaknemo do sredine stranic. Potem je ročica pravokotna na silo in tako

$$N = \frac{a\sqrt{3}}{2}(F + 2F + 3F) = 3\sqrt{3}aF.$$

(c) Krajevni vektor do točke P_0 na osi sistema izračunamo po formuli

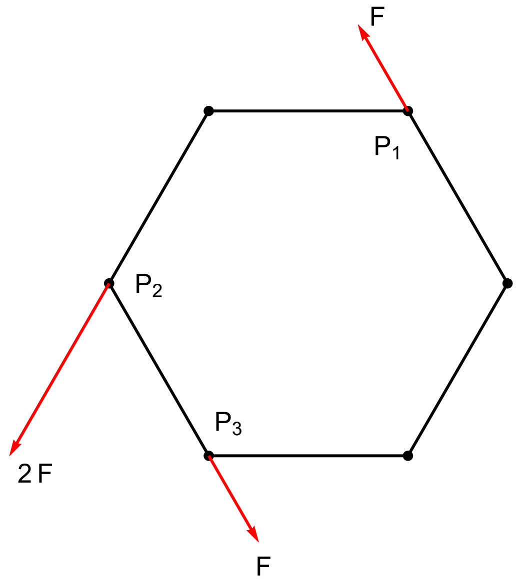
$$\vec{OP_0} = \frac{\vec{R}(\mathcal{F}) \times \vec{N}(\mathcal{F}, O)}{\vec{R}(\mathcal{F}).\vec{R}(\mathcal{F})} = -\frac{3a}{2}\left(\vec{\imath} + \sqrt{3}\vec{\jmath}\right).$$

2. Pravilni šestkotnik z dolžino stranice a je obremenjen tako kot kaže slika.

   (a) Zapiši sistem sil $\mathcal{F}$.

   (b) Izračunaj rezultanto sil $\vec{R}(\mathcal{F})$ in navorov $\vec{N}(\mathcal{F}, O)$ s polom O v središču mnogokotnika.

   (c) Določi os sistema.



Rešitev:

(a) Postavimo izhodišče koordinatnega sistema v središče mnogokotnika. Prijemališča sil so potem $P_1(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2})$, $P_2(-a, 0)$ in $P_3(-\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}a}{2})$, sile pa so $\vec{F_1} = F(-\frac{1}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath})$, $\vec{F_2} = -F(\vec{\imath} + \sqrt{3}\vec{\jmath})$ in $\vec{F_3} = F(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

(b) Rezultanta sil je

$$\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = F\left(-\vec{\imath} - \sqrt{3}\vec{\jmath}\right),$$

rezultanta navorov pa je

$$\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \sum_{i=1}^{3} \vec{OP_i} \times \vec{F_i} = aF\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3}aF\vec{k}.$$

(c) Krajevni vektor do točke P_0 na osi sistema izračunamo po formuli

$$\vec{OP_0} = \frac{\vec{R}(\mathcal{F}) \times \vec{N}(\mathcal{F}, O)}{\vec{R}(\mathcal{F}).\vec{R}(\mathcal{F})} = a\left(-\frac{3}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}\right).$$

2 Prostorski sistem sil

2.1 Rešene naloge

1. Podan je prostorski sistem sil $\vec{F_1} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$, $\vec{F_2} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$, $\vec{F_3} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$, s prijemališči v točkah $P_1(1, 2, 1)$, $P_2(-1, 0, 1)$, $P_3(1, -1, 0)$.

   (a) Izračunaj rezultanto sistema sil.

   (b) Izračunaj rezultanto navora sistema sil glede na pol v koordinatnem izhodišču.

   (c) Izračunaj invarianto sistema sil.

(d) Določi os sistema.

Rešitev:

(a) Rezultanta sistema sil je $\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 2\vec{\imath} + 2\vec{k}$.

(b) Izračunajmo

$$\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \sum_{i=1}^{3} \vec{OP_i} \times \vec{F}_i = (\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 3\vec{k}) + (\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + \vec{k}) + (-\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}) = \vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - \vec{k}.$$

(c) Invarianta sistema sil je $I(\mathcal{F}) = \vec{R}(\mathcal{F}) \cdot \vec{N}(\mathcal{F}, O) = 0$. Ker je $I(\mathcal{F}) = 0$ in $\vec{R}(\mathcal{F}) \neq \vec{0}$, ima sistem sil skupno prijemališče, ki leži na osi sistema.

(d) Os sistema je premica v smeri $\vec{R}(\mathcal{F})$, ki gre skozi točko P_0 dano s krajevnim vektorjem

$$\vec{OP_0} = \frac{\vec{R}(\mathcal{F}) \times \vec{N}(\mathcal{F}, O)}{\vec{R}(\mathcal{F}).\vec{R}(\mathcal{F})} = -\frac{3}{4}\vec{\imath} + \frac{1}{2}\vec{\jmath} + \frac{3}{4}\vec{k}.$$

Kratek račun

$$\vec{N}(\mathcal{F}, P_0) = \vec{P_0O} \times \vec{R}(\mathcal{F})$$

potrdi, da je P_0 res skupno prijemališče sil.

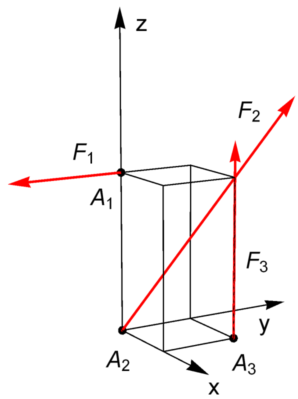
2. Za prostorski sistem sil podan na sliki s silami v smereh stranic in diagonale kvadra dimenzije 1m $\times$1m $\times$2m:

   (a) določi sile in njihova prijemališča;

   (b) izračunaj rezultanto sil in navora glede na pol A_2;

   (c) določi os sistema.

   Velikosti sil so $F_1 = 1\,\mathrm{kN}$, $F_2 = 2/\sqrt{6}\,\mathrm{kN}$, $F_3 = 1\,\mathrm{kN}$.



Rešitev:

(a) Prijemališča sil imajo koordiante $A_1(0,0,2)$, $A_2(0,0,0)$ in $A_3(1,1,0)$, sile pa so $\vec{F}_1 = -\vec{\jmath}\,\mathrm{kN}$, $\vec{F}_2 = \frac{1}{3}(\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k})\,\mathrm{kN}$ in $\vec{F}_3 = \vec{k}\,\mathrm{kN}$. Točka A_2 se sovpada s koordinatnim izhodiščem, zato pišimo v nadaljevanju O namesto A_2.

(b) Rezultanta sil je

$$\vec{R}(\mathcal{F}) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \frac{1}{3}\left(\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 5\vec{k}\right)\ \mathrm{kN},$$

rezultatnta navorov pa

$$\vec{N}(\mathcal{F}, O) = \vec{OA_1} \times \vec{F}_1 + \vec{OA_2} \times \vec{F}_2 + \vec{OA_3} \times \vec{F}_3 = (3\vec{\imath} - \vec{\jmath})\ \mathrm{kNm}.$$

Invarianta sistema je $I(\mathcal{F}) = \vec{R}(\mathcal{F}) \cdot \vec{N}(\mathcal{F}, O) = \frac{5}{3}$. Ker je invarianta različna od nič, sistem sil nima skupnega prijemališča.

(c) Os sistema je taka premica, da je navor s polom v poljubni točki P_0 na tej premici vzporeden rezultanti si. Dobimo jo s formulo

$$\vec{OP_0} = \frac{\vec{R}(\mathcal{F}) \times \vec{N}(\mathcal{F}, O)}{|\vec{R}(\mathcal{F})|^2}.$$

Po krajšem računu tako

$$\vec{OP_0} = \frac{1}{2}(\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + \vec{k})\,\mathrm{m}.$$

2.2 Dodatne naloge

1. Podan je prostorski sistem sil $\vec{F_1} = \vec{\imath} - \vec{k}$, $\vec{F_2} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\vec{k}$, $\vec{F_3} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$, s prijemališči v točkah $P_1(1, -2, 1)$, $P_2(-1, 0, 2)$, $P_3(1, 0, -1)$.

   (a) Izračunaj rezultanto sistema sil.

   (b) Izračunaj rezultanto navora sistema sil glede na pol v koordinatnem izhodišču.

   (c) Izračunaj invarianto sistema sil.

   (d) Določi os sistema.

   Rešitev: $\vec{R}(\mathcal{F}) = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 3\vec{k}$, $\vec{N}(\mathcal{F}, O) = 2\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} + 3\vec{k}$, $I(\mathcal{F}) = 10$, $\vec{OP_0} = \frac{1}{11}(12\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} + 2\vec{k})$.